

Title	温度成層流における乱流現象のモデル化とその適用性に関する研究( Dissertation_全文 )
Author(s)	牛島, 省
Citation	Kyoto University (京都大学)
Issue Date	1990-03-23
URL	<a href="http://dx.doi.org/10.14989/doctor.r7154">http://dx.doi.org/10.14989/doctor.r7154</a>
Right	
Type	Thesis or Dissertation
Textversion	author

# 温度成層流における乱流現象のモデル化 とその適用性に関する研究

1989年10月

牛 島 省



# 温度成層流における乱流現象のモデル化 とその適用性に関する研究

1989年10月

牛 島 省





## 目次

第1章 序論 .....	1
第2章 成層流の乱流計測実験 .....	4
2.1 実験の概要 .....	4
2.1.1 実験装置と計測方法 .....	4
2.1.2 成層流に対するLDVの適用性の検討 .....	9
2.2 乱流量に対する成層度の影響 .....	10
2.3 まとめ .....	20
参考文献 .....	21
第3章 成層流の乱流特性量のモデル化 .....	23
3.1 成層流の温度の積分特性距離の輸送方程式 .....	23
3.1.1 モデル式の誘導 .....	23
3.1.2 散逸項と生成項の係数の算定 .....	29
3.1.3 積分特性距離のモデル式の検証 .....	31
3.2 乱れ場の影響を考慮した温度変動量の散逸率の表示式 .....	34
3.2.1 等方性乱流場における温度のスペクトル方程式 .....	34
3.2.2 等方性乱流場における温度変動量の散逸率 .....	38
3.2.3 温度のスペクトル方程式の相似解に関する基礎式 .....	41
3.2.4 成層流における温度変動量の散逸率の表示式 .....	43
3.3 成層流の乱流プラントル数の表示式 .....	48
3.3.1 乱れ場の影響を考慮した乱流プラントル数の表示式 .....	48
3.3.2 実験結果との比較検討 .....	50
3.4 温度のスペクトル方程式のモデル化 .....	52
3.5 まとめ .....	53
参考文献 .....	55
第4章 成層流の熱流動現象の数値解析モデル .....	56
4.1 密度変化の大きい成層流に対する乱流モデル .....	56
4.1.1 ブシネスク近似を用いない基礎方程式 .....	56
4.1.2 2方程式乱流モデルの基礎方程式 .....	58
4.1.3 一般曲線座標系における基礎方程式 .....	65
4.2 非等温場におけるサブグリッドスケールモデル .....	66

4.3	まとめ	71
	参考文献	72
第5章	数値解析モデルの適用性	73
5.1	数値解析手法	73
5.1.1	非線形項の解析方法	73
5.1.2	圧力のポアソン方程式の解析方法	75
5.1.3	自由液面の解析方法	79
5.1.4	圧力と自由液面の解析方法の有効性	84
5.2	解析モデルの成層流への適用性	88
5.2.1	乱流モデルによる成層流の数値解析	88
5.2.2	成層流のラージエディシミュレーション	97
5.3	開水路の断熱側壁面近傍の成層流の数値解析	117
5.3.1	壁面近傍の乱流モデル	117
5.3.2	解析結果と実験結果	121
5.4	円筒容器内の成層化現象の数値解析	124
5.4.1	水実験による成層化現象の数値解析	124
5.4.2	密度変化の大きい成層化現象の数値解析	132
5.5	まとめ	142
	参考文献	146
第6章	結論	148
	謝辞	149

## 第1章 序論

鉛直方向に温度勾配と流速勾配を有する乱流状態の成層せん断流(成層流)は、自然界における大気や海洋等の流れ、また工学機器に関係する流体の流れなどとして、しばしば現れる流動形態であり、環境問題や機器の構造上の安全性等の問題と深く関係するものとなっている。このため、これまでに成層流に対する数多くのフィールドでの実測あるいは室内実験や理論的な考察がなされ、また近年は特に数値解析的な面からの研究なども盛んに行われている。

今日では、工学技術の進歩とともに、機器の安全性に関連した成層流の問題が、従来より一層重要なものになっており、また既往の成層流に関する問題とは異なった性質を有するようになった。たとえば、タンク型高速増殖炉という原子炉では、直径約16m程度の原子炉上部容器内に液体金属ナトリウムによる温度成層化現象が生ずる。この場合には、流体が水や空気と異なる熱的物性を有する液体金属であることや、成層化に伴う温度変化が150℃前後と非常に大きいため、流体の相対密度の変化が大きくなること、また機器の構造健全性の評価のためには成層界面近傍の平均温度分布のみならず温度変動量などの乱流量の予測が重要となること、さらにこれらの乱流量の構造物表面近傍における挙動を把握しなければならないことなど、従来の成層流の問題とはやや異なった側面からの研究が必要となってきている。

本研究では、このような成層流の諸特性に対する数値解析的な予測手法を開発することを目的として、成層流の主として温度場に関係する乱流特性量に対する実験的あるいは理論的な考察を行い、これを表現する表示式や数値解析モデルを提案した。さらに、これらの表示式や数値解析モデルを開水路内に形成された成層流および円筒容器内の成層化現象に適用し、その妥当性について検討を加えた。以下に本研究の概要を示す。

第2章では、開水路内に形成された安定な成層流を対象とした乱流計測実験の結果に関する考察を行った。実験では、レーザードップラー流速計システムと熱電対を用いて流速と温度の同時計測を行い、3次元成分にわたる乱流量の計測を行った。得られた実験結果に基づいて、流速変動量と成層流の成層度との関係、乱流拡散係数と成層度との関係、また温度変動量に対する乱流モデルの方程式中の乱流拡散項の係数に対する成層度の影響等を明らかにし、成層度の影響を考慮した2方程式乱流モデルの係数やモデル表示式を提案した。

第3章では、成層流の温度場に関係する乱流特性量についての理論的な考察を行った。

3.1では成層流の温度の積分特性距離に関するモデル化された輸送方程式を導き、方程式中の生成項と散逸項のモデル係数を実験結果等を用いて明らかにした。そして代数方程式の形とした輸送方程式の適用性を検討し、その妥当性を示した。

3.2では等方性乱流場における温度変動量の散逸率に関する考察を行い、この散逸率に対する乱流レイノルズ数や乱流ペクレ数等の影響を明らかにした。この考察によって得られた表示式に基づいて、成層流中の温度変動量の散逸率の表示式を提案した。

3.3では3.2の結果を用いて、既往の乱流プラントル数の表示式の改良を行い、乱流レイノルズ数等の乱れ場の影響が考慮された乱流プラントル数の表示式を導いた。この表示式により、これまでに計測された乱流プラントル数と成層度の関係が示すいくつかの傾向が適切に表現された。

3.4では等方性乱流場における温度のスペクトル方程式に対して3.2の結果を用いて、これを解析可能な形の方程式とした。この方程式をプラントル数の異なる流体に適用して、温度のスペクトルの分布形に関する検討を行った。

第4章では、成層流の熱流動現象を数値解析的に予測するための解析モデルに関する考察を行った。4.1では相対密度の変化が大きい成層流を対象として、ブシネスク近似を用いずに2方程式乱流モデルの基礎方程式を導いた。また、4.2では3.2で得られた結果を用いて非等温場のラージエディシミュレーションで用いるサブグリッドスケールモデルに関する考察を行い、サブグリッドスケールの温度変動量の散逸率に着目したモデル式を導いた。

第5章では、第2～4章で得られた乱流特性量に対する表示式や数値解析モデルの適用性に関する検討を行った。

5.1では数値解析手法に関する検討を行い、基礎方程式中の非線形項や圧力の解法、また自由液面の解法とそれらの適用性に関する考察を行った。

5.2ではまず第2章で得られた実験結果を用いて改良を加えた2方程式乱流モデルを開水路内の成層流に適用した。その結果、改良したモデルにより流速分布や温度分布、また温度変動強度等が適切に計算されることが示された。また、4.2で得られたサブグリッドスケールモデルを用いて成層流のラージエディシミュレーションを行い、数値解析により得られた流速や温度の乱流特性に関する検討を加えた。

5.3では開水路内に形成された成層流の断熱側壁面近傍の数値解析を行った。解析モデルとしては、壁面近傍に適用可能な低レイノルズ数の場における既往の乱流モデルと本研究の3.2で得られた乱れ場の影響を考慮した温度変動量の散逸率の表示式を組み合わせることで用いた。実験結果との比較から、本研究で提案した温度変動量の散逸率の表示式を用いることにより、壁面近傍の温度変動強度の分布が適切に計算されることが明らかとなった。

5.4では軸対称の円筒容器内に生ずる成層化現象の数値解析を行った。第2章の結果を用いた2方程式乱流モデルにより、実験で観察された成層化時の温度変動特性や成層界面の大規模な揺動現象がほぼ妥当に解析されることが示された。また、4.1で導いたブシネスク近似を用いない2方程式乱流モデルを、実際のタンク型高速増殖炉に近いスケールの

円筒容器内における液体金属ナトリウムの温度成層化現象に適用した。その結果、相対密度の変化が大きい成層化現象では、既往のブシネスク近似を用いた2方程式乱流モデルとの相違が生ずることが示され、また容器内の流体の質量が保存される場合には、自由液面の低下の過程が4.1で提案したモデルを用いて解析できることが示された。

## 第2章 成層流の乱流計測実験

第1章でも述べたように、成層流を対象として、これまでに数多くの現地実測や室内実験などが行われてきた<sup>1)</sup>。既往の実験的な研究の代表的なものとしては、Webster<sup>2)</sup>、Young<sup>3)</sup>、Gibsonら<sup>4)</sup>、またKomori<sup>5)</sup>らによるものなどが挙げられる。

本章では、最近成層流への適用が盛んに行われるようになった乱流モデルのモデル係数やモデル表示式に着目し、成層流の乱流計測実験から得られる結果を用いて、これらに対する成層度の影響について考察を行う。

### 2.1 実験の概要

#### 2.1.1 実験装置と計測方法

本研究で用いた実験装置のフローシステムを図2.1.1に示す。水の循環ループは、冷水系と温水系に分かれており、これらにはそれぞれ容積約4 m<sup>3</sup>の冷・温水タンクが設けられている。冷・温水タンクには、出力制御装置のついたヒータおよび冷却機が内部に設置されており、実験水路に流入する冷・温水の温度は一定に保たれる。また、冷・温水流量は、エアコントロールバルブの開度により制御され、各流量は電磁流量計(EMF)を通じて制御盤のパネル上に表示される。実験水路に流入する冷・温水は、水路上流にあるバルブ系の操作によって、その上下関係を変えることができる。本研究では、主として上層側が温水で下層側が冷水である安定成層流に関する考察を行うが、このバルブ系の操作により、冷・温水の上下関係が逆である不安定成層流を水路内に形成することも可能である。

実験水路を図2.1.2に示す。水路側面および底面はアクリルプレート製である。上流側のセパレータは主にアクリル製であるが、その先端部分には、熱による変形を防ぐためにステンレス板を用いた。これらの水路壁面および上流側セパレータの断熱性能は良好で、それらを通じての熱収支の影響は認められなかった。また、水路底面は水平であり、下流部分にある可動ゼキにより、水深が制御される。流況の概略図と座標系を図2.1.3に示した。

図2.1.4は、本実験における計測システムを示すものである。流速測定には、DANTEC 55Xシステムを用いた。光源部分は、最大出力5WのArイオンレーザー(SPECTRA-PHYSICS製)であり、光学系において分離されたレーザービームは、焦点距離300mmのフロントレンズを通過した後、水路側面から入射して水路内部に焦点を結ぶ。ビームの交さ角は約9.6°であり、測定体積の大きさは、約1.35mm×0.113mm×0.113mmである。散乱光は、光源前方のフォトマルチコーダで受光する。得られたドップラー信号は、DANTEC 55N23周波数トラッカーで処理した後、アナログコンピュータで電圧補正を行い、デジタルデータレコーダ(TEAC 2000A)により最終的にデジタルデータとして磁気テープに収録した。計測時には、オシロスコープおよびスペクトルアナライザによる信号のモニタリングを行った。水路横

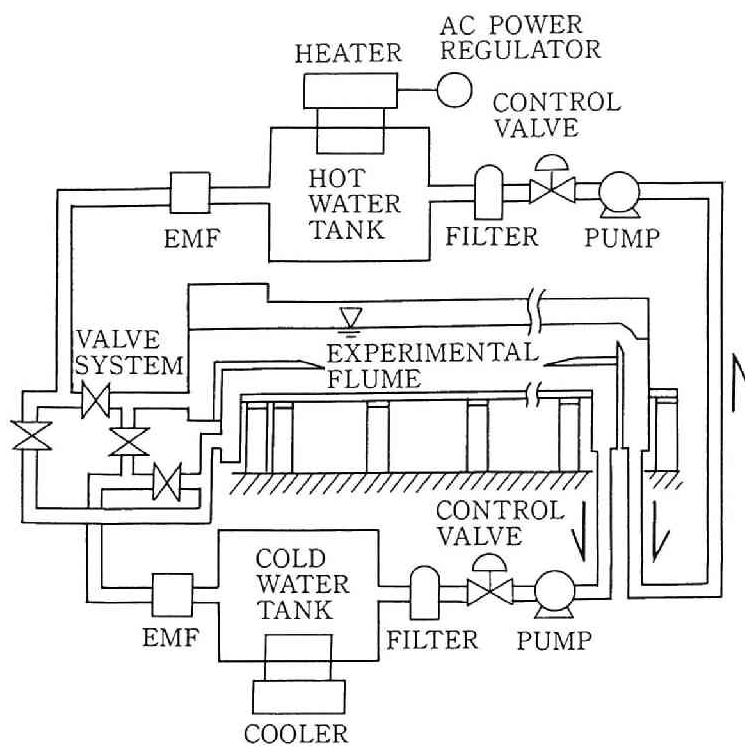


図2.1.1 実験装置のフローシステム

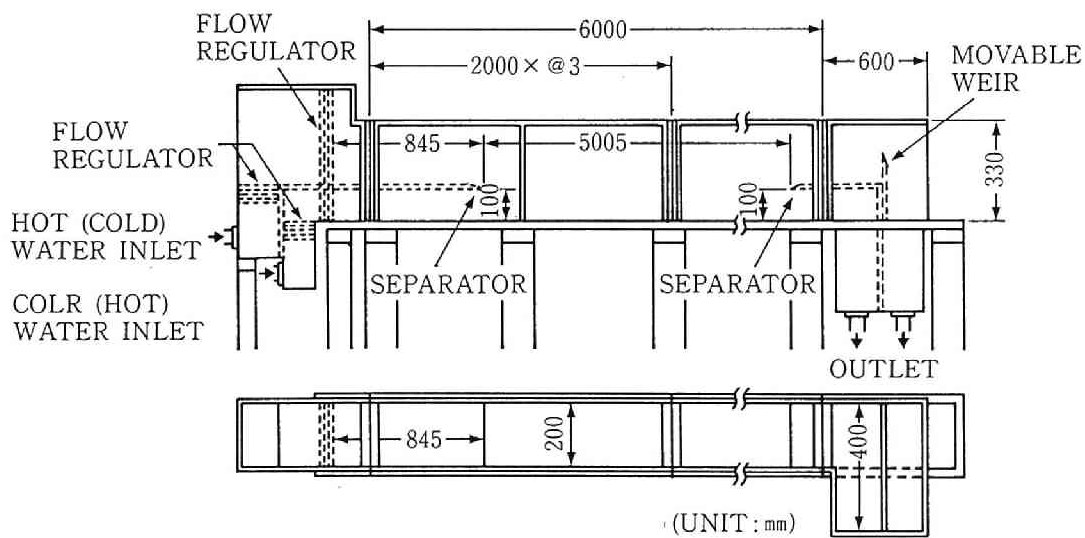


図2.1.2 実験水路



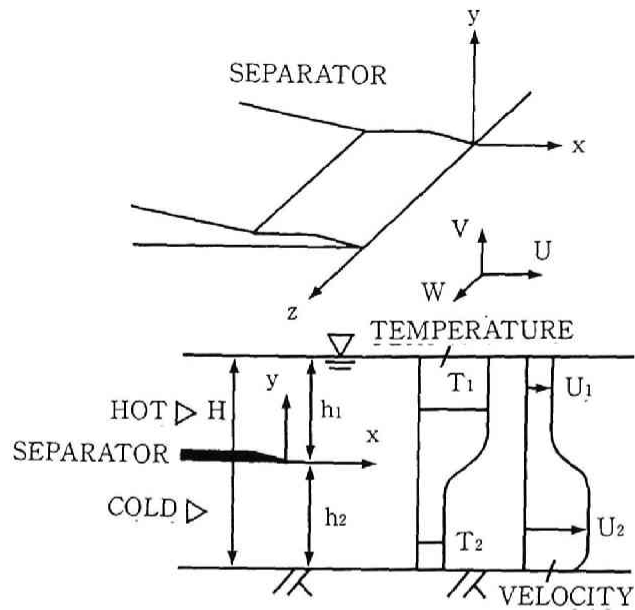


図2.1.3 流況の概略図と座標系

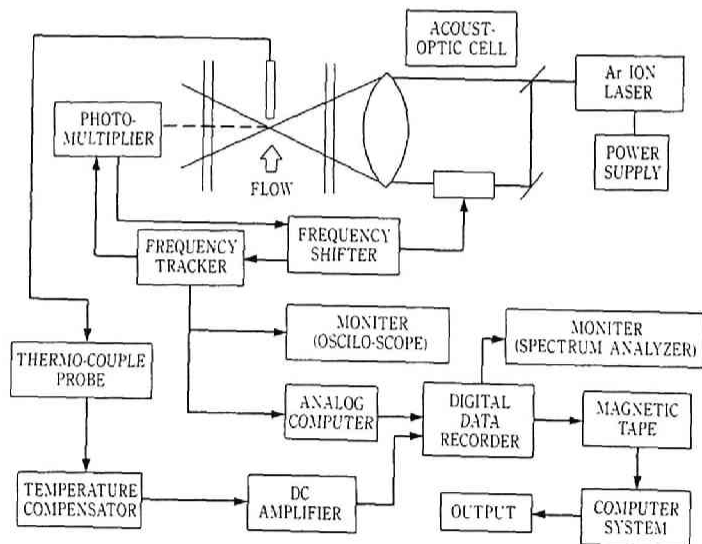


図2.1.4 計測システム

断方向(z方向)の流速成分を計測する場合には、平面反射鏡を利用して、レーザービームを水路底面から上方に向かって入射させ、散乱光を水路上方に設置したフォトマルチコーダにより受光した。その際、自由水面における散乱光のゆらぎを防止するため、水面上にアクリルプレートの小片を置いた。

レーザードップラー流速計を非等温の水流中に適用する場合には、流体の屈折率の変化がレーザービームに影響を及ぼすため、これを補正することが必要となる。本研究では、Mizushimaら<sup>5)</sup>の方法に従って、乱流量データに関する検討を行った。この点の詳細に関しては、2.1.2で述べる。

温度の計測には、シース外径0.25mmの非接地形C A熱電対を用いた。この熱電対の時定数は約10msecである。図2.1.4に示すように、流速と温度を同時計測する場合には、熱電対の信号は、氷冷式温度補償器、直流アンプを経て、デジタルデータレコーダにより流速に関するデータとともに磁気テープ上に収録される。

異なる位置の点の温度を同時に計測する場合には、図2.1.5に示す熱電対プローブを使用した。この1組の熱電対プローブのうちの一方は、0.1mmの精度で他方に対して相対位置を変えることができ、両者の熱電対の信号を組み合わせることによって、温度の相互相関等を得ることができる。この実験結果に関しては3.1で言及する。

温度および流速に関するデータのサンプリング周波数は200Hz、計測時間は120秒である。磁気テープに収録したデジタルデータの統計処理には、電力中央研究所計算機センターの大型計算機を利用した。

実験条件を表2.1.1に示す。表2.1.1中の記号は、図2.1.3に示されるものに相当する。

表2.1.1 実験条件

RUN NO.	$U_1$ (m/s)	$U_2$ (m/s)	$T_1$ (°C)	$T_2$ (°C)	Re $\times 10^4 (-)$	Pe $\times 10^5 (-)$	$\overline{Ri}$ (-)
S1	0.049	0.113	20.1	14.3	1.54	1.28	0.649
S2	0.067	0.118	17.3	14.4	1.23	1.02	0.511
S3	0.072	0.118	29.2	14.5	1.11	0.920	3.18
S4	0.051	0.113	20.0	14.3	1.50	1.24	0.680
S5	0.100	0.150	19.6	14.5	1.21	1.00	0.935
S6	0.053	0.117	25.0	19.5	1.76	1.28	0.615
U1	0.070	0.112	17.6	18.8	1.13	0.840	-0.312

成層流の水深については全ケースとも同一条件であり、図2.1.3中の全水深Hは0.28m、上下層水深 $h_1$ 、 $h_2$ はそれぞれ0.18m、0.10mである。また、表中のレイノルズ数Re、ペクレ数Peおよびバルクリチャードソン数 $\overline{Ri}$ は次式で与えられるものである。

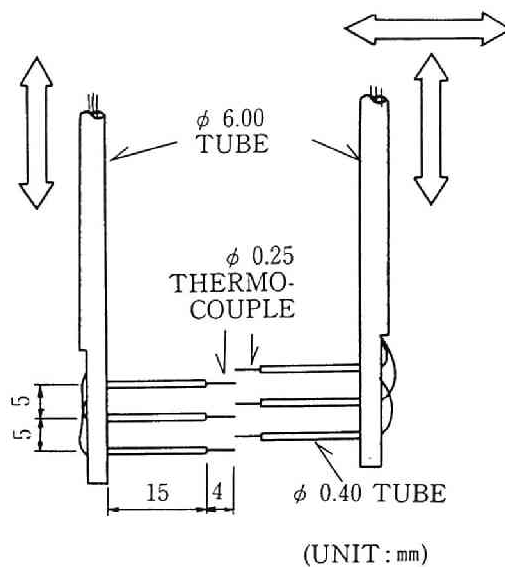


図2.1.5 温度の多点同時計測用プローブ

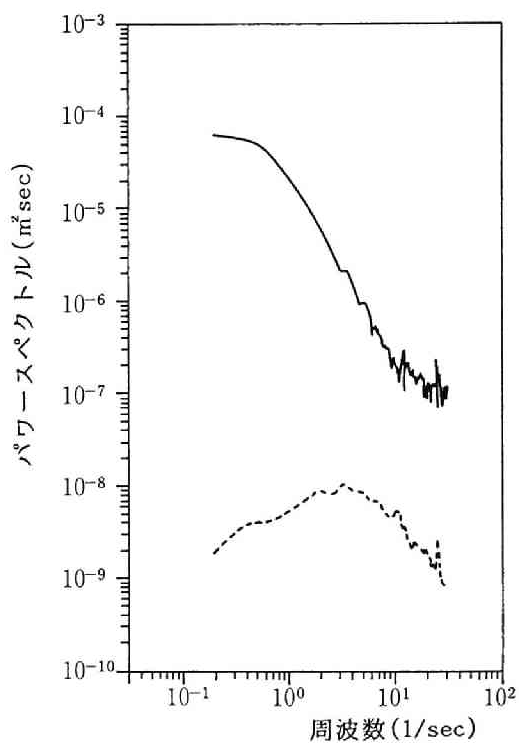


図2.1.6 パワースペクトル(RUN-S6: —  $\overline{u_{1r}^2}$ ; .....  $\overline{u_{2r}^2}$ )

$$Re = \frac{(U_2 - U_1)H}{\nu_2} \quad \text{---(2.1.1)}$$

$$Pe = \frac{(U_2 - U_1)H}{\alpha_2} \quad \text{---(2.1.2)}$$

$$Ri = \frac{\beta_g (T_1 - T_2)H}{(U_2 - U_1)^2} \quad \text{---(2.1.3)}$$

ここで  $\nu_2$  および  $\alpha_2$  は、それぞれ温度  $T_2$  における動粘性係数と熱拡散係数である。

## 2. 1. 2 成層流に対するLDVの適用性の検討

前述したように、レーザードップラー流速計を非等温水流中へ適用する場合には、温度の非一様性に起因する屈折率の変化がビームにゆらぎを生じさせるため、実際の流体の乱れ以外の変動を合わせて計測することになる。ここでは、このビームのゆらぎに起因する変動量の大きさを検討するため、Mizushimaら<sup>6)</sup>と同様の手法を用いた。

Mizushimaらは、成層流中に設置したアクリルプレートの小片中にビームの焦点を結ばせ、その結果得られるビームのゆらぎによる変動量を用いて、流体の真の乱れ量を算出した。彼らによれば、レーザードップラー流速計システムにより非等温水流中で得られる流速変動成分  $u_{ia}$  は、真の流速変動成分  $u_{ir}$  とビームのゆらぎに起因する架空の流速変動成分  $u_{if}$  とから構成される。従って、 $u_{if}^2$  は次式で与えられる。

$$\overline{u_{if}^2} = \overline{u_{ia}^2} - \overline{u_{ir}^2} - 2\overline{u_{ir}u_{if}} \quad \text{---(2.1.4)}$$

上式右辺第3項は、次式によりその値を見積ることができる。

$$\overline{u_{ir}u_{if}} \lesssim \frac{1.5\alpha'\Lambda^2A_1}{n_0U_1\cos^2\phi}, \quad \overline{u_{2r}u_{2f}} \lesssim \frac{1.5\alpha'\Lambda^2A_2}{n_0U_1\cos^2\phi} \left(\frac{u_{1r}^2}{u_{2r}^2}\right)^{1/2} \quad \text{---(2.1.5)}$$

ここに、サフィックス1,2はそれぞれ流下方向及び鉛直方向成分を表す。また、 $U_1$ は流速の平均成分を表す。 $\alpha'$ は水の屈折率の温度依存度、 $\Lambda$ は積分スケール、 $2\phi$ はビームの交さ角であり、 $n_0$ は水の平均的屈折率、また、 $A_1$ ,  $A_2$ は、次式で表される相関である。

$$A_1 = |\overline{u_{1a} \cdot \partial^2 \Theta / \partial t^2}|, \quad A_2 = |\overline{u_{2a} \cdot \partial^2 \Theta / \partial t^2}| \quad \text{---(2.1.6)}$$

(2.1.4)式中の  $u_{if}^2$  はアクリルプレートの小片を利用した計測により算出することができる。本実験では、表2.1.1中のRUN-S6を対象として、上記の諸量の値の評価を行った。その結果、 $u_{ir}u_{if}$  ( $i=1,2$ )の値に関しては、彼らと同様に、無視し得るものであることが明らかとなった。従って、 $u_{if}^2$ に関する計測を行うことにより、(2.1.4)式から真の流速変動量を算出することができる。図2.1.6に一例としてRUN-S6の  $u_{1r}^2$  と  $u_{2r}^2$  のパワースペクトルをそれぞれ実線と破線で示した。同図より  $u_{2r}^2$  の影響は非常に小さいものであることは明らかである。従って、本研究では(2.1.4)式における  $u_{ia}^2$  が  $u_{ir}^2$  に等しいとした。

## 2. 2 乱流量に対する成層度の影響

成層流中における乱流計測実験の結果等を用いて、ここでは代表的な2方程式乱流モデルである  $k-\varepsilon$  モデルのモデル係数やモデル表示式に対する実験的な面からの検討を主として行い、これらに対する成層度の影響を明らかにする。なお、ここで用いる実験結果は、表2.1.1中のRUN-S1, S2およびS3で断面位置  $x/H=3.57$  において得られたものである。

### (1) レイノルズ応力

レイノルズ応力は、乱流モデルの種類により異なった形でモデル表示されている。Launderら<sup>7)</sup>は、レイノルズ応力に関する輸送方程式を用いて全体の方程式系をクローズするいわゆる second-order closure model を提案した。この乱流モデルは2方程式乱流モデルと比較して厳密な形のモデル化がなされているが、これをより簡単な形とした代数方程式モデルの適用例も少なくない<sup>8), 9)</sup>。これは主として数値計算上の理由によるものであると考えられ、実際の適用性を考慮した場合、より簡単な形で高い精度を有する解析モデルの提案も望まれると考えられる。Launder<sup>10)</sup>は、成層流を対象とした考察を行う際に、レイノルズ応力のうち流速変動量に対して、各流速変動量成分と乱れエネルギー  $k$  の比の値を、成層流の成層度の関数とする表示を行った。勾配形拡散仮説(ブシネスクの仮説)を用いる  $k-\varepsilon$  モデルでは、せん断流中の流速変動量が適切に表せないという例<sup>11)</sup>もあるが、このLaunderと同様の表示方法を用いて  $k-\varepsilon$  モデルを改良することもできる<sup>12)</sup>。ここでは成層流中の乱流計測結果を用いて、流下方向の流速変動量 ( $\overline{u'^2}$ ) に対する鉛直方向の流速変動量 ( $\overline{v'^2}$ ) と水路横断方向の流速変動量 ( $\overline{w'^2}$ ) の比の値、すなわち  $\overline{v'^2}/\overline{u'^2}$  および  $\overline{w'^2}/\overline{u'^2}$  と、次式で定義される局所勾配型リチャードソン数  $Ri$  との関係性を求めた。

$$Ri = \beta_g \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) / \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad \text{--- (2.2.1)}$$

図2.2.1および図2.2.2にその結果を示す。 $\overline{v'^2}/\overline{u'^2}$  と  $Ri$  の関係については、図2.2.1に示すように、 $Ri \geq 0.2$  の領域で Komori<sup>5)</sup> と Young<sup>3)</sup> の実験結果は全く逆の傾向を示しており、本実験の結果も  $Ri \geq 0.3$  ではばらつきが大きくなっている。Komoriはその実験結果の傾向をもたらした原因が、成層度の強い領域では  $\overline{v'^2}$  の方程式の浮力生成項が  $\overline{v'^2}$  の値を増加させる方向に作用したためであるとしているが、本実験結果からはそのような傾向はあまり明瞭に見られない。一方、 $\overline{w'^2}/\overline{u'^2}$  と  $Ri$  の関係に関しては、本実験結果はKomoriによるものと良く一致している。図2.2.1および図2.2.2中の実線で示される関係は、それぞれ次式で示されるものである。

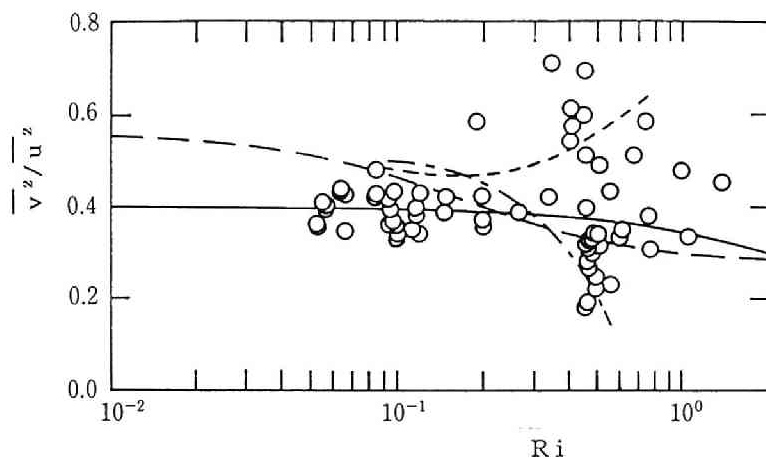


図2.2.1  $\overline{v^2}/u^2$ と $Ri$ の関係(○実験結果; — (2.2.2)式;  
--- Young<sup>3)</sup>; ..... Komori<sup>5)</sup>; -.- Launder<sup>10)</sup>)

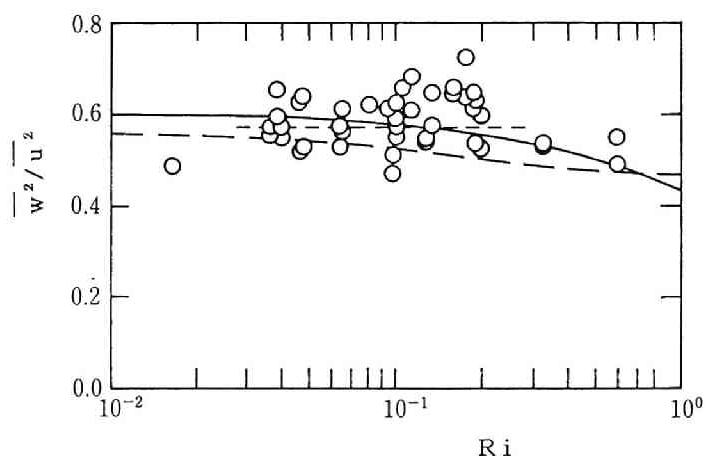


図2.2.2  $\overline{w^2}/u^2$ と $Ri$ の関係(○実験結果; — (2.2.3)式;  
..... Komori<sup>5)</sup>; -.- Launder<sup>10)</sup>)

$$\frac{\overline{v^2}}{\overline{u^2}} = \frac{0.4}{1+0.17Ri} \quad \text{---(2.2.2)}$$

$$\frac{\overline{w^2}}{\overline{u^2}} = \frac{0.6}{1+0.37Ri} \quad \text{---(2.2.3)}$$

これらの関係から次式が得られる。

$$\frac{\overline{u^2}}{k} = \frac{2(1+0.17Ri)(1+0.37Ri)}{0.0629Ri^2+0.79Ri+2} \quad \text{---(2.2.4)}$$

$$\frac{\overline{v^2}}{k} = \frac{0.8(1+0.37Ri)}{0.0629Ri^2+0.79Ri+2} \quad \text{---(2.2.5)}$$

一方、せん断応力  $-\overline{uv}$  は、 $k-\varepsilon$  モデルで用いられるブシネスクの仮説を用いれば、次のように表示される。

$$-\overline{uv} = \varepsilon_M \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} \right) \quad \text{---(2.2.6)}$$

成層流中では、渦動粘性係数  $\varepsilon_M$  は成層度の影響を受けるため、

$$\varepsilon_M = C_v f_b \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{---(2.2.7)}$$

のように成層度の関数  $C_v f_b$  を用いて表されるものとする。ここで、 $C_v$  は 0.09 なる定数である。実験結果を用いて  $C_v f_b$  と  $Ri$  との関係を示したものが図 2.2.3 である。ここで、エネルギー散逸率  $\varepsilon$  は、 $\overline{u^2}$  のパワースペクトル  $\Phi_{11}$  に対して、その慣性小領域で成り立つ次の関係式

$$\Phi_{11}(n) = A \varepsilon^{2/3} n^{-5/3} \quad \text{---(2.2.8)}$$

を用いて算出した。ここに  $n$  は波数であり、周波数  $f$  を波数に変換する際には次式を用いた。

$$n = 2\pi f / \overline{U} \quad \text{---(2.2.9)}$$

また、 $A$  は定数で、Irwin<sup>13)</sup> にならい、ここでは 0.45 とした。図 2.2.3 では  $\varepsilon$  の算出の際に生ずる誤差等が一因となって実験データはややばらついた分布となっているが、 $f_b$  の  $Ri$  に対する明確な依存性が見られる。図中の実線で示される関係より次式が得られる。

$$C_v f_b = C_v \frac{1-1.5Ri}{1+1.5Ri} \quad \left(0 \leq Ri \leq \frac{1}{1.5}\right) \quad \text{---(2.2.10-a)}$$

$$C_v f_b = 0 \quad \left(\frac{1}{1.5} \leq Ri\right) \quad \text{---(2.2.10-b)}$$

また、図中の一点鎖線で示される関係から次式が得られる。

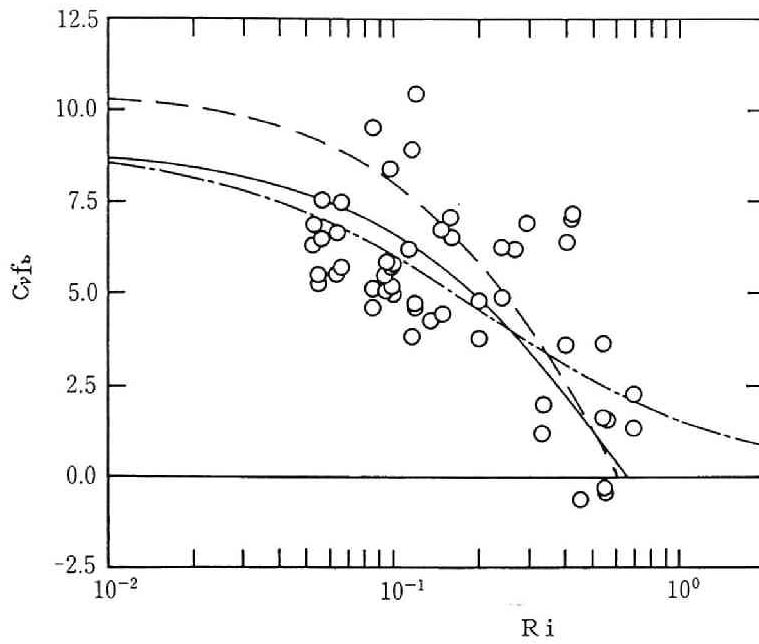


図2.2.3  $C_{f_b}$ と $Ri$ の関係(O実験結果;  
— (2.2.10)式; --- (2.2.11)式; - - - Launder<sup>101)</sup>)

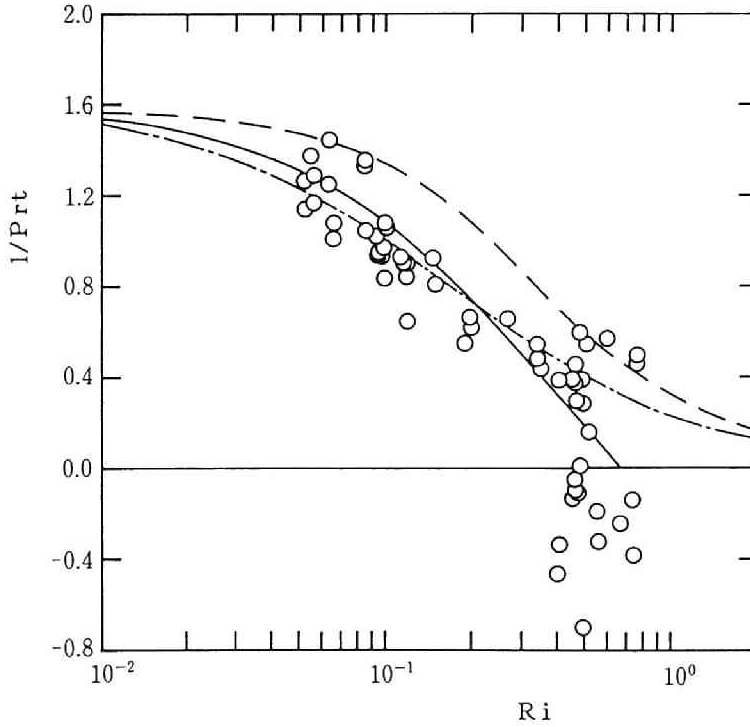


図2.2.4  $1/Prt$ と $Ri$ の関係(O実験結果;  
— (2.2.15)式; --- (2.2.16)式; - - - Launder<sup>101)</sup>)



$$C_p f_b = \frac{C_p}{1 + 5.0 Ri} \quad \text{---(2.2.11)}$$

Laundner<sup>10)</sup>により提案された関係式も3.3で述べるように(2.2.7)式と同じ形であり、これを図中では破線で示した。この結果から、Laundnerの関係式も本研究の実験結果とある程度一致しており、モデルとして妥当なものであると考えられる。

## (2) 乱流熱フラックス

乱流熱フラックス $-\overline{v\theta}$ も $-\overline{uv}$ と同様に、 $k-\varepsilon$ モデルでは次式のように平均温度勾配と乱流熱拡散係数 $\varepsilon_H$ との積により表現される。

$$-\overline{v\theta} = \varepsilon_H \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad \text{---(2.2.12)}$$

$\varepsilon_H$ は、渦動粘性係数 $\varepsilon_M$ と乱流プラントル数 $Prt(= \varepsilon_M / \varepsilon_H)$ を用いて表される。従来の解析例では $Prt$ を定数(1.0等)と置く方法もとられているが<sup>14)</sup>、Stewart<sup>15)</sup>が指摘したように、成層度が増加するにつれ、スカラー量の乱流拡散効果は運動量の乱流拡散効果と比較してより強く抑制されるため、両者の乱流拡散係数の比である $Prt$ も成層度に応じて変化するものとするのが妥当である。従って、ここでは $Prt$ が $Ri$ の関数で表されるものと考え、 $\varepsilon_H$ は次式により与えられるものとした。

$$\varepsilon_H = \varepsilon_M / Prt \quad \text{---(2.2.13)}$$

$$1/Prt = f(Ri) \quad \text{---(2.2.14)}$$

$1/Prt$ と $Ri$ との関係を示したものが図2.2.4である。図2.2.4中の実線で示される関係式は次のように表される。

$$\frac{1}{Prt} = \frac{1}{Prto} \frac{1 - 1.5 Ri}{1 + 2.6 Ri} \quad (0 \leq Ri \leq \frac{1}{1.5}) \quad \text{---(2.2.15-a)}$$

$$\frac{1}{Prt} = 0 \quad (\frac{1}{1.5} \leq Ri) \quad \text{---(2.2.15-b)}$$

また、図中の一点鎖線は次式から得られる関係を表すものである。

$$\frac{1}{Prt} = \frac{1}{Prto} \frac{1}{1 + 6.0 Ri} \quad \text{---(2.2.16)}$$

ここに、 $1/Prto$ は1.6とした<sup>10)</sup>。図中では、 $Ri \geq 0.4$ の領域で実験結果が上下にばらつき、また $1/Prt$ が負の値を示す結果も見られるが、これは $\varepsilon_M$ あるいは $\varepsilon_H$ が0に近い正負の値をとるためである。Okamotoら<sup>16)</sup>は、 $Ri=0.2$ なる条件で、成層流中において乱流混合が盛んに行われる領域と静穏な領域とが区分されるとしたが、図2.2.3および図2.2.4の結果では、これより大きい $Ri \cong 0.4$ がその条件に相当する形となっていると考えられる。 $\varepsilon_M$ あるいは $\varepsilon_H$ が負となる現象はKomori<sup>17)</sup>の結果にも見られ、これは間欠的に生ずる内部波の碎波現象が原因であるとされている。StewartやMcBeanら<sup>18)</sup>と同様に、このような成層度の強い場での $v$ と $\theta$ のコヒーレンスおよびフェイズに関する検討を行った。その一例

を示したものが図2.2.5および図2.2.6である。図中のNはVäisälä周波数<sup>19)</sup>である。これらの結果はコヒーレンスが高く、フェイズが約 $1/2\pi$ ずれた傾向を示すことから、成層流中にStewartが指摘したような内部波状の運動が存在していると考えられる。また、可視化実験でもKomoriの実験と同様に、図2.2.7に示すような巻波状の碎波現象が見られた。従って、本実験でもKomoriの実験と同様の原因で $\varepsilon_M$ あるいは $\varepsilon_H$ が負の値を示したと考えられる。このようなことから、成層度の強い領域においては、流れの場が乱流混合状のものとは異なったものとなる。このため、成層度の非常に強い場では、ブシネスクの仮説を用いる2方程式乱流モデルの適用が困難となることも考えられる<sup>20)</sup>。

一方、 $u$ と $\theta$ の相互相関係数と $Ri$ の関係を示したものが図2.2.8である。流下方向の乱流熱フラックスに対して、図中の実線で示される次式が得られる。

$$\frac{\overline{-u\theta}}{(\overline{u^2})^{1/2}(\overline{\theta^2})^{1/2}} = \frac{0.5}{1+0.8Ri} \quad \text{---(2.2.17)}$$

### (3) $\theta^2$ の方程式の乱流拡散項に対する成層度の影響

Hossainら<sup>21)</sup>によって示されているように、温度変動量の輸送方程式中の乱流拡散項TDは、次のように表される。

$$TD = - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta^2} \quad \text{---(2.2.18)}$$

2次のオーダーでクローズする乱流モデルや一般的な2方程式乱流モデルでは、上式で表される乱流拡散項をそのまま解くことはできないため、何らかのモデル化が必要となる。Launder<sup>22)</sup>は比較的簡単な表示式として次式を提案した。

$$\overline{-u_j \theta^2} = C_{T1} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} \quad \text{---(2.2.19)}$$

ここに $C_{T1}$ は定数で、0.13である。ここでは、上式中の $C_{T1}$ に対する成層度の影響を検討した。すなわち、(2.2.19)式中に定数 $C_{T1}$ と成層度の関数となる $f_T$ を導入する。

$$\overline{-u_j \theta^2} = C_{T1} f_T \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} \quad \text{---(2.2.20)}$$

$C_{T1} f_T$ と $Ri$ の関係を示したものが図2.2.9である。実験結果にはややばらつきが見られるが、成層度が強まるにつれ、 $f_T$ は減少する傾向を示す。また、成層度が十分弱い領域でも、 $C_{T1} f_T$ の値は0.06程度であり、Launderによって示された0.13なる値と比較して小さい。図2.2.9中の実線で示される関係から次式が得られる。

$$C_{T1} = 0.06 \quad \text{---(2.2.21)}$$

$$C_{T1} f_T = \frac{C_{T1}}{1+10Ri^2} \quad \text{---(2.2.22)}$$

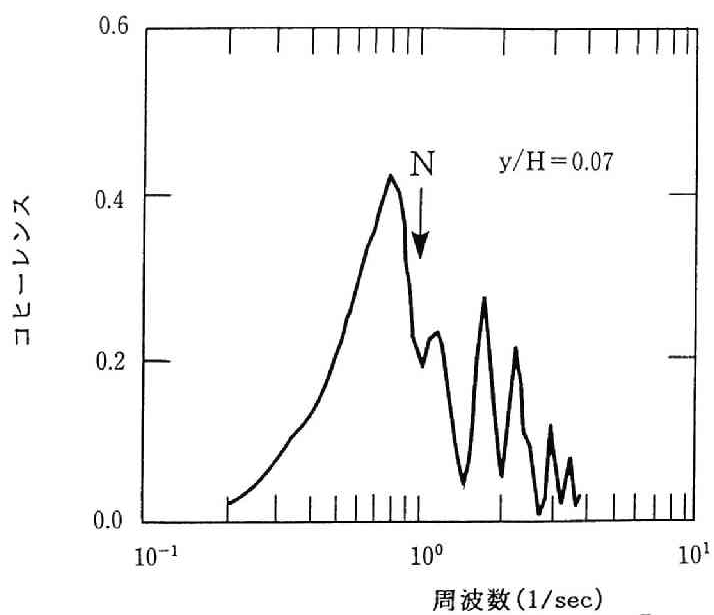


図2.2.5  $v$ と $\theta$ のコヒーレンス(RUN-S3)

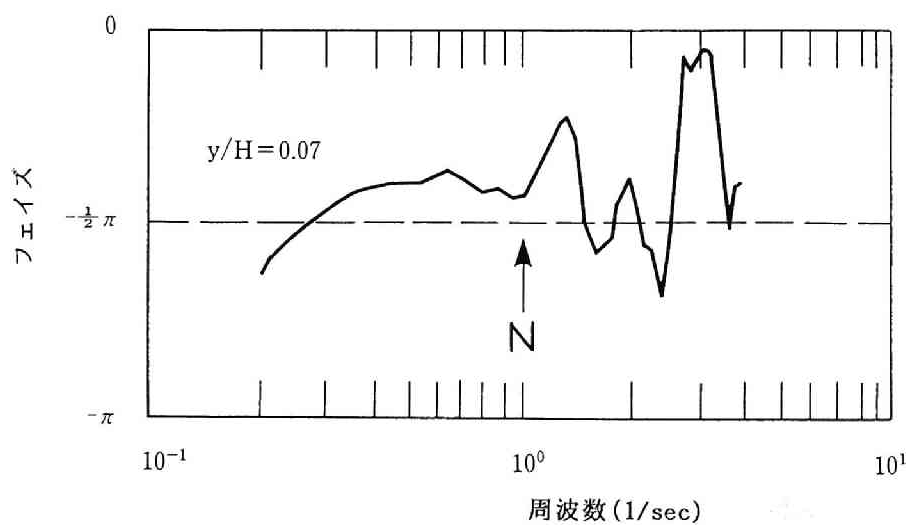


図2.2.6  $v$ と $\theta$ のフェイズ(RUN-S3)

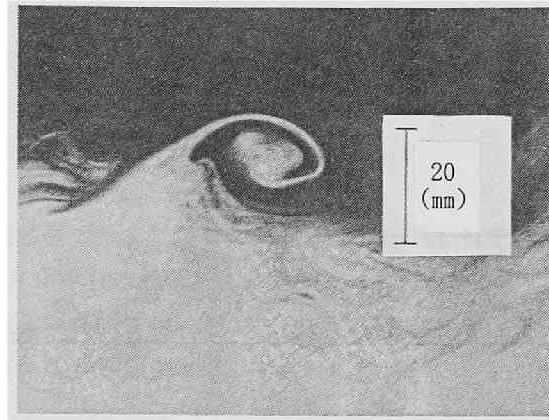


図2.2.7 内部波運動の可視化写真(RUN-S3)

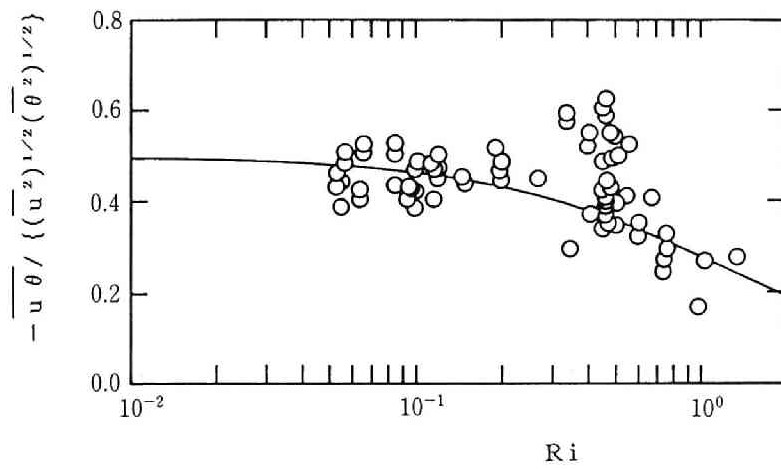


図2.2.8  $u$ と $\theta$ の相互相関係数と $Ri$ の関係(○実験結果；— (2.2.17)式)

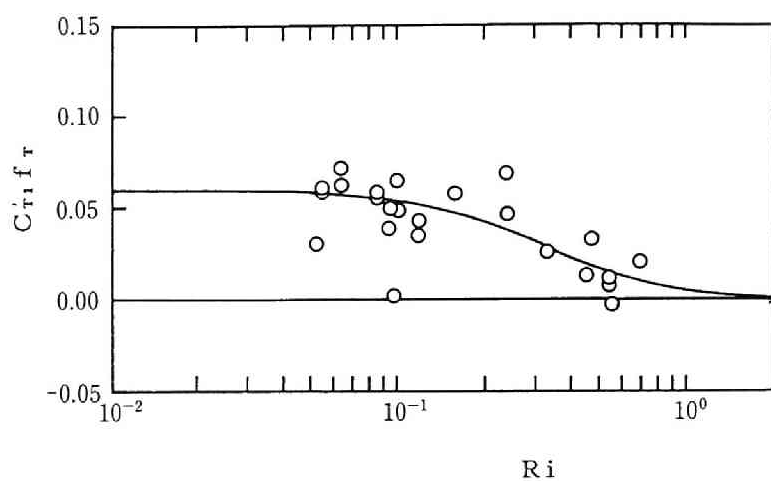


図2.2.9  $C_{Ti} f_r$ と $Ri$ の関係(○実験結果; — (2.2.22)式)

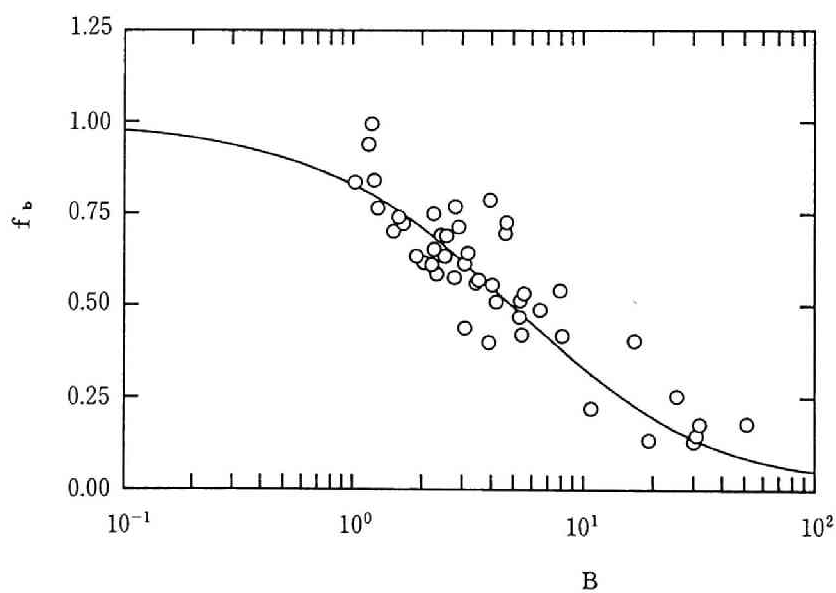


図2.2.10  $f_b$ と $B$ の関係(○実験結果; — (2.2.25)式)

この関係式を用いると、 $\overline{\theta^2}$ に関する方程式中の乱流拡散項は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta^2} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{\tau 1} f_{\tau} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j}) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{0.06}{1+10Ri^2} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} \right) \quad \text{---(2.2.23)}
 \end{aligned}$$

既往の成層流の数値解析では、 $C_{\tau 1}$ を0.13なる値の定数としているために、計算により得られた $\overline{\theta^2}$ の鉛直方向の分布が過大に広がっている例もあるが<sup>12)</sup>、これに対して(2.2.23)式で表される関係式を用いることで数値解析結果が改善されることも期待される。このことに関する具体的な適用例については、5.2で述べる。

#### (4) Launderのパラメータを用いた表示式

Launder<sup>10)</sup>は、成層度の強さを表す無次元のパラメータとして、次式で表されるパラメータBを提案した。

$$B = \beta_g \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} \quad \text{---(2.2.24)}$$

上式で表されるパラメータは、(2.2.1)式で表される局所勾配型リチャードソン数と比較して、分母に流速勾配の2乗なる量を含まないため、数値計算上取扱いやすいものになっている。このパラメータと(2.2.7)式中の $f_b$ との関係を示したものが図2.2.10である。図に示されるように、実験結果はよくまとまって表示され、 $f_b$ とBの間に次のような関係式が得られる。

$$f_b = \frac{1}{1+0.2B} \quad \text{---(2.2.25)}$$

(2.2.25)式と(2.2.11)式より $f_b$ を消去すると、 $Ri$ とBの関係として次式が得られる。

$$B = 25Ri \quad \text{---(2.2.26)}$$

上式を用いると(2.2.16)式は、Bを用いて次のように表される。

$$\frac{1}{Pr_t} = \frac{1}{Pr_{to}} \frac{1}{1+0.24B} \quad \text{---(2.2.27)}$$

また、(2.2.22)式で表される $f_{\tau}$ は、(2.2.26)式より次のように表される。

$$f_{\tau} = \frac{1}{1+0.16B^2} \quad \text{---(2.2.28)}$$

## 2. 3 まとめ

本章では、開水路内に形成された安定な成層流を対象とした乱流計測実験の結果に関する考察を行った。実験では、レーザードップラー流速計(LDV)システムと熱電対を用いて流速と温度の同時計測を行い、3次元成分にわたる乱流量の計測を行った。得られた実験結果に基づいて、流速変動量と成層流の成層度との関係、乱流拡散係数と成層度との関係、また温度変動量に対する乱流モデルの方程式中の乱流拡散項の係数に対する成層度の影響等を明らかにし、成層度の影響を考慮した2方程式乱流モデルの係数やモデル表示式を提案した。

## 《第2章：参考文献》

- 1) 谷 一郎編：流体力学の進歩 乱流，丸善株式会社，1980.
- 2) Webster, C.A.G.: An Experimental Study of Turbulence in a Density-Stratified Shear Flow, J. Fluid Mech., Vol. 19, 1964.
- 3) Young, S.T.B.: Turbulence Measurements in a Stably-Stratified Turbulent Shear Flow, Queen Mary Coll., London, Rep. QMC-EP6018, 1975.
- 4) Gibson, M.M. and Launder, B.E.: Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer, J. Fluid Mech., Vol. 86, 1978.
- 5) Komori, S., Ueda, H., Ogino, F. and Mizushima, T.: Turbulence Structure in Stably Stratified Open-Channel Flow, J. Fluid Mech., Vol. 130, 1983.
- 6) Mizushima, T., Ogino, F., Ueda, H. and Komori, S.: Application of Laser Doppler Velocimetry to Turbulence Measurement in Non-Isothermal Flow, Proc. R. Soc. Lond. A. 366, 63-79, 1979.
- 7) Launder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W.: Progress in the Development of a Reynolds-stress Turbulence Closure, J. Fluid Mech., Vol. 68, 1975.
- 8) McGuirk, J.J. and Rodi, W.: Mathematical Modelling of Three-Dimensional Heated Surface Jets, J. Fluid Mech., Vol. 95, 1979.
- 9) Leschziner, M.A.: Numerical Prediction of the Internal Density Jump, IAHR 18th Congress, Itaria, Vol. 3, 1979.
- 10) Launder, B.E.: On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech., vol. 67, 1975.
- 11) 牛島 省・加藤正進・藤本 健・守屋祥一：各種乱流モデルの適用性評価 - 2次元循環流の解析 -, 電力中央研究所報告, 研究報告385019, 1985.
- 12) 牛島 省・守屋祥一：2方程式乱流モデルの成層流への適用性, 電力中央研究所報告, 研究報告:U87070, 1988.
- 13) Irwin, H.P.A.H.: Measurements in a Self-Preserving Plane Wall Jet in a Positive Pressure Gradient, J. Fluid Mech., vol. 61, 1973.
- 14) Viollet, P.L.: Turbulent Mixing in a Two Layer Stratified Shear Flow, EDF Report, E44/80-17, 1980.
- 15) Stewart, R.W.: Turbulence and Waves in a Stratified Atmosphere, Radio Science, Vol. 4, Number 12, 1269-1278, 1969.
- 16) Okamoto, M. and Webb, E.K.: The Temperature Fluctuations in Stable Stratification, Quart. J. R. Met. Soc., 96, pp. 591-600, 1970.
- 17) Komori, S.: Turbulence Structure in Stratified Flow, Ph.D. dissertation, Kyoto University, 1980.



- 18) McBean, G.A. and Miyake, M.: Turbulent Transfer Mechanisms in the Atmospheric Surface Layer, Quart. J. R. Met. Soc., 98, pp. 383-398, 1972.
- 19) Turner, J.S.: Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge at the University Press, 1973.
- 20) 牛島 省・田中伸和・守屋祥一: 成層流実験に基づく  $k - \varepsilon$  モデルの改良とその適用性, 第32回水理講演会論文集, 1988.
- 21) Hossain, M.S. and Rodi, W.: Equations for Turbulent Buoyant Flows and their Modeling, Report SFB 80/T/46, University of Karlsruhe, 1974.
- 22) Launder, B.E.: Turbulence Models and their Experimental Verification, Imperial College, Dept. of Mech. Eng. Report HTS/73/26, 1973.

### 第3章 成層流の乱流特性量のモデル化

本章では、成層流の温度場の乱流構造に関する乱流特性量のモデル表示式の提案を行う。3.1では、温度の相関関数から得られる積分特性距離に対するモデル化された輸送方程式を導き、代数方程式の形としたこのモデル式の検証を行う。3.2では、等方性乱流場における温度変動量の散逸率に関する考察を行い、その結果を用いて乱れ場の影響を考慮した成層流中の温度変動量の散逸率の表示式を提案する。3.3では、既往の乱流プラントル数の表示式に3.2の結果等を用いることにより、乱れ場の影響を考慮した乱流プラントル数の表示式を導く。また、3.4では、3.2で得られた結果を用いて等方性乱流場における温度のスペクトル方程式に関する考察を行う。

#### 3.1 温度の積分特性距離の輸送方程式

##### 3.1.1 モデル式の誘導

時刻  $t$ 、空間位置  $\mathbf{r}_0$  における温度の平均量からの変動成分を  $\theta(\mathbf{r}_0, t)$  とする。このとき、時刻が一致し、空間位置が異なる2点間の温度の相互相関関数  $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$  は、次式で定義される。

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \overline{\theta(\mathbf{r}_0, t) \theta(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}, t)} \quad \text{---(3.1.1)}$$

ここで、上付きバーは時間平均またはアンサンブル平均を表す。温度の積分特性距離  $L_\theta(\mathbf{r}_0, t)$  は一般に次式で定義される。

$$L_\theta(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{\overline{\theta^2(\mathbf{r}_0, t)}} \frac{C_0}{2\pi^2} \int_{V(\mathbf{r})} R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) \frac{d\mathbf{r}}{r^2} \quad \text{---(3.1.2)}$$

ここに、 $C_0$  はある定数である。相互相関関数  $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$  はスペクトル関数  $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0, t)$  と次のような関係がある。

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \int_{V(\mathbf{k})} \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad \text{---(3.1.3)}$$

$$\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V(\mathbf{r})} R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad \text{---(3.1.4)}$$

これを用いると、(3.1.2)式は次のようにも表現される。

$$L_\theta(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{\overline{\theta^2(\mathbf{r}_0, t)}} C_0 \int_{V(\mathbf{k})} \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0, t) \frac{d\mathbf{k}}{k} \quad \text{---(3.1.5)}$$

従って、相互相関関数またはスペクトル関数の方程式に、(3.1.2)または(3.1.5)式右辺で表される演算を施すことにより、積分特性距離  $L_\theta(\mathbf{r}_0, t)$  に関する方程式を導くことができる。本節では、温度の相互相関関数  $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t)$  に対する方程式を求めて、これに(3.1.2)式を用いることにより、積分特性距離  $L_\theta(\mathbf{r}_0, t)$  に関する方程式を導く。

流体中の温度 $\Theta$ に対する方程式は、一般に、次のように表される。

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_k \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - \frac{\mu}{\rho c} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) - \alpha \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_k \partial x_k} = 0 \quad \text{---(3.1.6)}$$

ここに、 $\mu$ は粘性係数、 $\rho$ は密度、 $c$ は比熱、 $\alpha$ は熱拡散係数である。(3.1.6)式より、次式で示される温度の変動成分 $\theta(r_0, t)$ に対する方程式 $F(r_0, t)$ が導かれる。

$$\begin{aligned} F(r_0, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \theta(r_0, t) + \overline{U_k(r_0, t)} \frac{\partial}{\partial x_k} \theta(r_0, t) + u_k(r_0, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\Theta(r_0, t)} \\ & + u_k(r_0, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \theta(r_0, t) - u_k(r_0, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \theta(r_0, t) - S P(r_0, t) \\ & - \alpha \frac{\partial^2 \theta(r_0, t)}{\partial x_k^2} = 0 \end{aligned} \quad \text{---(3.1.7)}$$

ここに、 $S P(r_0, t)$ は、

$$\begin{aligned} S P(r_0, t) = & \alpha \left\{ \frac{\partial \overline{U_i(r_0, t)}}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i(r_0, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(r_0, t)}{\partial x_i} \right) \right. \\ & + \frac{\partial u_i(r_0, t)}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \overline{U_i(r_0, t)}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{U_k(r_0, t)}}{\partial x_i} \right) \\ & + \frac{\partial u_i(r_0, t)}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i(r_0, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(r_0, t)}{\partial x_i} \right) \\ & \left. + \frac{\partial u_i(r_0, t)}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \overline{U_i(r_0, t)}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{U_k(r_0, t)}}{\partial x_i} \right) \right\} \end{aligned} \quad \text{---(3.1.8)}$$

である。 $S P(r_0, t)$ は、流速変動および平均流速の勾配に起因する、温度変動の生成を表す項であるが、ここではこの項は他の項と比較して無視し得るとして、

$$S P(r_0, t) = 0 \quad \text{---(3.1.9)}$$

とする。温度の相互相関関数 $R(r, r_0, t)$ に関する方程式は、

$$\theta(r_0 + r, t) F(r_0, t) + \theta(r_0, t) F(r_0 + r, t) = 0 \quad \text{---(3.1.10)}$$

なる式を導くことにより得られる。2点 $P(x_i)$ 、

$P'(x'_i)$ の関係が、図3.1.1に示されるようである

とき、

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial r_i} \quad \text{---(3.1.11-a)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial r_i} \quad \text{---(3.1.11-b)}$$

が成り立つ<sup>1)</sup>。(3.1.11)式を用いて、(3.1.10)

式の演算を行うと、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} R(r, r_0, t) + \overline{U_k(r_0, t)} \frac{\partial}{\partial x_k} R(r, r_0, t)$$

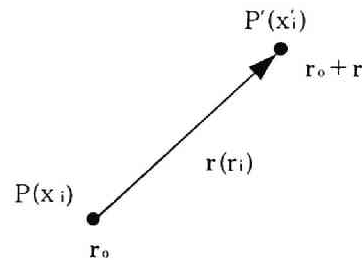


図3.1.1 点PとP'の関係

$$\begin{aligned}
& + \{ \overline{U_k(r_0+r, t)} - \overline{U_k(r_0, t)} \} \frac{\partial}{\partial r_v} \overline{R(r, r_0, t)} \\
& + \overline{\theta(r_0+r, t) u_k(r_0, t)} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\Theta(r_0, t)} \\
& + \overline{\theta(r_0, t) u_k(r_0+r, t)} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{\Theta(r_0+r, t)} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k(r_0, t) R'(r, r_0, t)} + \frac{\partial}{\partial r_v} \{ \overline{u_k(r_0+r, t) R'(r, r_0, t)} \\
& - \overline{u_k(r_0, t) R'(r, r_0, t)} \} \\
& - \alpha \{ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \overline{R(r, r_0, t)} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial r_v} \overline{R(r, r_0, t)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} \overline{R(r, r_0, t)} \} \\
& = 0 \tag{3.1.12}
\end{aligned}$$

ここに、

$$\overline{R'(r, r_0, t)} = \theta(r_0, t) \theta(r_0+r, t) \tag{3.1.13}$$

である。以上より、温度に関する積分特性距離  $L_\theta(r_0, t)$  は、(3.1.2)式および(3.1.12)式により一般的に与えられる。

次に、本研究で対象とする2次元成層せん断流中における、鉛直方向の温度の積分特性距離に関する方程式を求めるために、(3.1.12)式を鉛直2次元場に適用する。この条件下では、

$$\mathbf{r} = (0, r_y, 0) \tag{3.1.14}$$

であるため、(3.1.12)式は次のように表現される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \overline{R(r, r_0, t)} + \overline{U(r_0, t)} \frac{\partial}{\partial x} \overline{R(r, r_0, t)} + \overline{V(r_0, t)} \frac{\partial}{\partial y} \overline{R(r, r_0, t)} \\
& + \{ \overline{V(r_0+r, t)} - \overline{V(r_0, t)} \} \frac{\partial}{\partial r_v} \overline{R(r, r_0, t)} \\
& + R_{rv} \frac{\partial}{\partial y} \overline{\Theta(r_0, t)} + R_{vr} \frac{\partial}{\partial y} \overline{\Theta(r_0+r, t)} \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v(r_0, t) R'(r, r_0, t)} + \frac{\partial}{\partial r_v} \{ \overline{u_k(r_0+r, t) R'(r, r_0, t)} \\
& - \overline{u_k(r_0, t) R'(r, r_0, t)} \} \\
& - \alpha \{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \overline{R(r, r_0, t)} - 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial r_v} \overline{R(r, r_0, t)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} \overline{R(r, r_0, t)} \} \\
& = 0 \tag{3.1.15}
\end{aligned}$$

一方、2次元場における積分特性距離  $L_\theta(r_0, t)$  は、定数  $C_0$  を適当におくことにより、

(3.1.2)式から、

$$L_{\theta}(r_0, t) = \frac{1}{\overline{\theta^2}(r_0, t)} \int_{-\infty}^{\infty} R(r, r_0, t) dr_y \quad \text{---(3.1.16)}$$

という形で示される。(3.1.15)式を(3.1.16)式に代入すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \{L_{\theta}(r_0, t) \overline{\theta^2}(r_0, t)\}}_T + \underbrace{\overline{U}(r_0, t) \frac{\partial}{\partial x} \{L_{\theta}(r_0, t) \overline{\theta^2}(r_0, t)\}}_C \\ & + \underbrace{\overline{V}(r_0, t) \frac{\partial}{\partial y} \{L_{\theta}(r_0, t) \overline{\theta^2}(r_0, t)\}}_C \\ & + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \{\overline{V}(r_0+r, t) - \overline{V}(r_0, t)\} \frac{\partial}{\partial r_y} R(r, r_0, t) dr_y}_C \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \overline{\Theta}(r_0, t) \int_{-\infty}^{\infty} R_{rv} dr_y + \int_{-\infty}^{\infty} R_{vr} \frac{\partial}{\partial y} \overline{\Theta}(r_0+r, t) dr_y}_P \\ & + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v}(r_0, t) R'(r, r_0, t) dr_y - \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{L_{\theta}(r_0, t) \overline{\theta^2}(r_0, t)\}}_D \\ & + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r_y} \{u_k(r_0+r, t) R'(r, r_0, t) - u_k(r_0, t) R'(r, r_0, t)\} dr_y}_E \\ & - 2\alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} R(r, r_0, t) dr_y}_E = 0 \quad \text{---(3.1.17)} \end{aligned}$$

ここで、

$$R_{rv} = \overline{\theta(r_0+r, t) v(r_0, t)} \quad \text{---(3.1.18-a)}$$

$$R_{vr} = \overline{v(r_0+r, t) \theta(r_0, t)} \quad \text{---(3.1.18-b)}$$

$$R_{rv} \neq R_{vr} \quad \text{---(3.1.18-c)}$$

である。(3.1.17)式中の各項の物理的意味は、T：時間項、C：移流項、P：生成項、D：拡散項、E：散逸項と解釈される。

(3.1.17)式を実際に利用しやすい形とするため、この方程式のモデル化を行う。散逸項以外の各項のモデル化に際しては、Rotta<sup>1)</sup>による流速に関する積分特性距離のモデル式を参考にした。まず、移流項中の第3項は、次のように変形される。

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \{ \overline{V}(r_0+r, t) - \overline{V}(r_0, t) \} \frac{\partial}{\partial r_y} R(r, r_0, t) dr_y \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \overline{V}(r_0+r, t)}{\partial y} R(r, r_0, t) dr_y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \overline{U}(r_0+r, t)}{\partial x} R(r, r_0, t) dr_y = \frac{\partial \overline{U}(r_0, t)}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} R(r, r_0, t) dr_y \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \overline{U}(r_0+r, t)}{\partial x} - \frac{\partial \overline{U}(r_0, t)}{\partial x} \right\} R(r, r_0, t) dr_y \\
&= \frac{\partial \overline{U}(r_0, t)}{\partial x} L_{\theta}(r_0, t) \overline{\theta}^2(r_0, t) \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \overline{U}(r_0+r, t)}{\partial x} - \frac{\partial \overline{U}(r_0, t)}{\partial x} \right\} R(r, r_0, t) dr_y \quad \text{---(3.1.19)}
\end{aligned}$$

上式右辺第1項は、(3.1.17)式中の移流項第1項とまとめて次のように表現できる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ \overline{U}(r_0, t) L_{\theta}(r_0, t) \overline{\theta}^2(r_0, t) \}$$

また、(3.1.19)式右辺第2項の積分は無視する。

(3.1.17)式の生成項の第2項に関しては、 $\Theta(r+r_0, t)$ を点 $r_0$ でTaylor展開して、この3階微分までの項をとる。そして、これを生成項中へ代入すると、生成項は次のように表される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \overline{\Theta}(r_0, t) \int_{-\infty}^{\infty} R_{TV} dr_y \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \overline{\Theta}(r_0, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \overline{\Theta}(r_0, t) r_y + \frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \overline{\Theta}(r_0, t) r_y^2 \right\} R_{VT} dr_y \\
&= \frac{\partial \overline{\Theta}(r_0, t)}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} (R_{TV} + R_{VT}) dr_y + \frac{\partial^2 \overline{\Theta}(r_0, t)}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} r_y R_{VT} dr_y \\
&+ \frac{\partial^3 \overline{\Theta}(r_0, t)}{\partial y^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} r_y^2 R_{VT} dr_y \quad \text{---(3.1.20)}
\end{aligned}$$

ここで、 $R_{VT}$ が $r_y$ に関して対称であるとすれば、(3.1.20)式右辺第2項が消去される。さらに、特性距離 $L_{\theta 1}$ 、 $L_{\theta 3}$ を

$$L_{\theta 1} \equiv \frac{1}{\overline{\theta}(r_0, t) v(r_0, t)} \int_{-\infty}^{\infty} (R_{TV} + R_{VT}) dr_y \quad \text{---(3.1.21-a)}$$

$$L_{\theta 3} \equiv \left\{ \frac{1}{\overline{\theta(r_0, t) v(r_0, t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} r_y^2 R_{vT} dr_y \right\}^{1/3} \quad \text{--- (3.1.21-b)}$$

と定義すれば、生成項は、

$$\begin{aligned} & \overline{\theta(r_0, t) v(r_0, t)} \frac{\partial \overline{\Theta(r_0, t)}}{\partial y} (C_{L1} L_{\theta}) \\ & + \overline{\theta(r_0, t) v(r_0, t)} \frac{\partial^3 \overline{\Theta(r_0, t)}}{\partial y^3} (C_{L3} L_{\theta}^3) \end{aligned}$$

と表現される。ここに、

$$L_{\theta 1} \equiv C_{L1} L_{\theta} \quad \text{--- (3.1.22-a)}$$

$$L_{\theta 3}^3 \equiv C_{L3} L_{\theta}^3 \quad \text{--- (3.1.22-b)}$$

なる仮定を用いた。

また、拡散項中の一つの項を乱れの運動エネルギー  $k$  を用いて次のようにモデル化する。。。。

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v(r_0, t) R'(r, r_0, t)} dr_y \\ & = -C_{LD} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ k^{1/2}(r_0, t) L_{\theta}(r_0, t) \overline{\theta^2(r_0, t)} \frac{\partial L_{\theta}(r_0, t)}{\partial y} \right\} \quad \text{--- (3.1.23)} \end{aligned}$$

次に等方性乱流場で得られる結果を用いて散逸項のモデル化を行う。3.2で後述するように、乱れが十分大きい場における温度変動量の散逸率  $\varepsilon_{\theta}$  は次のように表される。

$$\varepsilon_{\theta} = c_1 \frac{\overline{\theta^2}}{L_{\theta}^{2/3}} \varepsilon^{1/3} \quad \text{--- (3.1.24)}$$

ここに、 $c_1$  は定数、 $\varepsilon$  は乱れの運動エネルギーの散逸率である。また、Rotta<sup>(1)</sup>により、

$$\varepsilon = c \frac{k^{3/2}}{L} \quad \text{--- (3.1.25)}$$

が示された。ここに  $L$  は流速に関する積分特性距離であり、 $c$  は乱れが十分大きい場においては定数として表される。(3.1.24)、(3.1.25)式より、 $\varepsilon_{\theta}$  は次のように表される。

$$\varepsilon_{\theta} = c_1 c^{1/3} \frac{\overline{\theta^2} k^{1/2}}{L_{\theta}^{2/3} L^{1/3}} \quad \text{--- (3.1.26)}$$

ここで、積分特性距離の比を

$$\lambda \equiv \frac{L}{L_{\theta}} \quad \text{--- (3.1.27)}$$

とし、(3.1.27)式を(3.1.26)式に用いて  $L$  を消去すると、

$$\varepsilon_{\theta} = c_1 c^{1/3} \lambda^{-1/3} \frac{\overline{\theta^2} k^{1/2}}{L_{\theta}} \quad \text{---(3.1.28)}$$

となる。Rottaは、流速に関する積分特性距離の輸送方程式中の散逸項が、 $\varepsilon L$ でモデル化されると考えた。ここでは、この考えにならい、温度の積分特性距離の輸送方程式中の散逸率が $\varepsilon_{\theta} L_{\theta}$ でモデル化されるとする。すなわち、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r_k} \{ u_k(r_0, +r, t) R'(r, r_0, t) - u_k(r_0, t) R'(r, r_0, t) \} dr_y \\ & - 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} R(r, r_0, t) dr_y = C_{LE} \varepsilon_{\theta} L_{\theta} \end{aligned} \quad \text{---(3.1.29)}$$

ここに、 $C_{LE}$ は定数とする。上式に(3.1.28)式を用いると、(3.1.29)式右辺は、

$$C_{LE} \varepsilon_{\theta} L_{\theta} = C_{LE} c_1 c^{1/3} \lambda^{-1/3} k^{1/2} \overline{\theta^2} = C_{LE} k^{1/2} \overline{\theta^2} \quad \text{---(3.1.30)}$$

となる。ここに、

$$C_{LE} = C_{LE} c_1 c^{1/3} \lambda^{-1/3} \quad \text{---(3.1.31)}$$

乱れが十分大きい場では、上式中の $c$ および $c_1$ は定数であり、また、Sreenivasanら<sup>2)</sup>の実験結果に見られるように十分に発達した等方性乱流場では $\lambda$ はほぼ定数と見なし得る。このため、以下上式中の $C_{LE}$ を定数として扱うことにする。

以上のモデル化により、(3.1.17)式は、各変数の添え字“(r<sub>0</sub>, t)”を省略して、次のように表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (L_{\theta} \overline{\theta^2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{U} L_{\theta} \overline{\theta^2}) + \overline{V} \frac{\partial}{\partial y} (L_{\theta} \overline{\theta^2}) \\ & + C_{L1} L_{\theta} \overline{v \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y} + C_{L3} L_{\theta}^3 \overline{v \theta} \frac{\partial^3 \overline{\theta}}{\partial y^3} \\ & - C_{LD} \frac{\partial}{\partial y} (k^{1/2} L_{\theta} \overline{\theta^2} \frac{\partial L_{\theta}}{\partial y}) - \alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} (L_{\theta} \overline{\theta^2}) \\ & + C_{LE} k^{1/2} \overline{\theta^2} = 0 \end{aligned} \quad \text{---(3.1.32)}$$

この(3.1.32)式中には4つの未定係数 $C_{L1}$ ,  $C_{L3}$ ,  $C_{LD}$ ,  $C_{LE}$ が含まれている。

### 3. 1. 2 散逸項と生成項の係数の算定

#### (1) 散逸項の係数の算定

Sreenivasanら<sup>2)</sup>は、格子により発生した等方性乱流中の温度変動とそのスケールに関する研究を行った。その結果から、乱れの運動エネルギー $k$ と温度変動量 $\overline{\theta^2}$ の流下距離 $x$ に対する関係として、次式が得られる。

$$\frac{k^{1/2}}{\overline{U}} = \frac{1}{\overline{U}} \left( \frac{3}{2} \overline{u^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{3}{2} \alpha_1 \right)^{1/2} \left( \frac{x}{M} - \frac{x_0}{M} \right)^{-n/2}$$



$$\cong 0.245 \left( \frac{x}{M} - 3 \right)^{-0.6} \quad \text{--- (3.1.33)}$$

$$\frac{\overline{\theta^2}}{\Delta \Theta^2} = \beta_1 \left( \frac{x}{M} - \frac{x_0}{M} \right)^{-m} \cong \beta_1 \left( \frac{x}{M} - 3 \right)^{-m} \quad \text{--- (3.1.34)}$$

ここに、 $\overline{U}$ および $u$ は主流平均流速とその変動成分、 $M$ は流速変動を与えるための格子の格子間隔、 $x_0$ および $x_0'$ は仮想原点、 $\Delta \Theta$ は加熱格子による加熱温度であり、 $\alpha_1$ および $\beta_1$ は係数である。(3.1.34)式中の $m$ の値は、加熱格子の格子間隔 $M_\theta$ により変化するが( $m=1.40 \sim 1.55$ )、Sreenivasanらはこれらの値は本質的には同等の値であるとしている。ここでは、 $M$ と $M_\theta$ が等しい実験条件下で加熱格子を全体的に加熱した場合の結果である $m=1.44$ を、 $C_{LE}$ の値の推定に用いることとする。また、Sreenivasanらの結果より次の関係式が得られる。

$$\frac{L_\theta}{M} \cong 0.13 \gamma_1 \left( \frac{x}{M} - 3 \right)^{0.3} \quad \text{--- (3.1.35-a)}$$

$$\gamma_1 = 0.8 \sim 0.85 \quad \text{--- (3.1.35-b)}$$

ここで、(3.1.32)式をSreenivasanらの実験に適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\dots}) = \frac{\partial}{\partial y} (\overline{\dots}) = 0 \quad \text{--- (3.1.36-a)}$$

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} = 0 \quad \text{--- (3.1.36-b)}$$

であるので、(3.1.32)式は次のような形に帰着する。

$$\overline{U} \frac{d}{dx} (L_\theta \overline{\theta^2}) + C_{LE} k^{1/2} \overline{\theta^2} = 0 \quad \text{--- (3.1.37)}$$

上式の各変数を無次元化すると、 $C_{LE}$ に関する次式が得られる。

$$C_{LE} = - \frac{\frac{d}{d(x/M)} \left( \frac{L_\theta}{M} \frac{\overline{\theta^2}}{\Delta \Theta^2} \right)}{\frac{\overline{\theta^2}}{\Delta \Theta^2} \frac{k^{1/2}}{\overline{U}}} \quad \text{--- (3.1.38)}$$

(3.1.38)式に、(3.1.33)、(3.1.34)、(3.1.35)式を代入し、先述したように $m$ の値を1.44とすれば、 $C_{LE}$ は流下距離に関係しない定数となり、その値は次のように見積もることができる。

$$C_{LE} = 0.175 \gamma_1 = 0.442 \sim 0.469 \quad \text{--- (3.1.39)}$$

## (2)生成項の係数 $C_{L1}$ の算出

図3.1.2に表2.1.1中のRUN-S6の時間平均温度分布と相互相関関数の分布をそれぞれ無次元化して示す。座標系は第2章と同じであり、図2.1.3で示される。図中の $T^*$ 、 $R^*$ は、次式で定義される。

$$T^* = (\bar{\Theta} - T_2) / (T_1 - T_2) \quad \text{---(3.1.40)}$$

$$R^* = \frac{\overline{\theta(y_0/H) \theta(y/H)}}{\overline{\theta^2(y_0/H)}} \quad \text{---(3.1.41)}$$

温度相関を計測する際の基準点位置の $y$ 座標 $y_0$ は、本研究では全て0(mm)とした。図中の $R^*$ の分布を $y/H$ にわたり積分した値が $L_\theta/H$ であり、RUN-S6では0.114であった。また同じ断面内の流速変動量と乱流熱フラックスの分布を図3.1.3、図3.1.4に示す。

十分に発達した成層流中では、(3.1.32)式中の移流項と拡散項がほぼバランスしており、またこれらは他の項と比較すると小さい値であると仮定することができる。このような場では、(3.1.32)式は次式で示される簡単な代数方程式となる。

$$L_\theta = - \frac{C_{LE}}{C_{L1}} \frac{k^{1/2} \overline{\theta^2}}{\overline{v \theta (\partial \Theta / \partial y)}} \quad \text{---(3.1.42)}$$

ここで、 $C_{L3}$ は0とした。(3.1.42)式に対して、RUN-S6で得られた $y/H = y_0/H$ における各実験値を代入することにより、 $C_{L1}$ の値は1.28と算出される。

## 3. 1. 3 積分特性距離のモデル式の検証

積分特性距離に関するモデル式(3.1.32)式を簡略化した代数方程式(3.1.42)式の適用性に関する実験的な検証を行う。対象とする実験は、表2.1.1に示される安定成層流RUN-S1およびRUN-S4と、不安定成層流RUN-U1の3ケースである。これらの実験において得られた鉛直方向の相互相関関数を積分して得られる積分特性距離は、(3.1.16)式で表される積分特性距離の定義に基づいて算出したもので、ここでは次式で示される。

$$L_\theta / H = \frac{1}{\overline{\theta^2(y_0/H)}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\theta(y_0/H) \theta(y/H)} dy / H \quad \text{---(3.1.43)}$$

一方、(3.1.42)式は、3.1で導いたモデル方程式に由来するものであり、積分特性距離 $L_{\theta c}$ は次式から算出される。

$$L_{\theta c} / H = \frac{C_{LE}}{C_{L1}} \frac{k^{1/2} \overline{\theta^2}}{\overline{v \theta (\partial \Theta / \partial y)}} \frac{1}{H} \bigg|_{y=y_0} \quad \text{---(3.1.44)}$$

(3.1.44)式右辺の係数 $C_{L1}$ 、 $C_{LE}$ は、これまでの検討により既知の値( $C_{L1}=1.28$ 、 $C_{LE}=0.455$ )となっており、また各変数の値は実験により求められる。このようにして、(3.1.43)および(3.1.44)式両式右辺に実験計測値を代入して、 $L_\theta/H$ および $L_{\theta c}/H$ を算出し、その比較検討を行う。

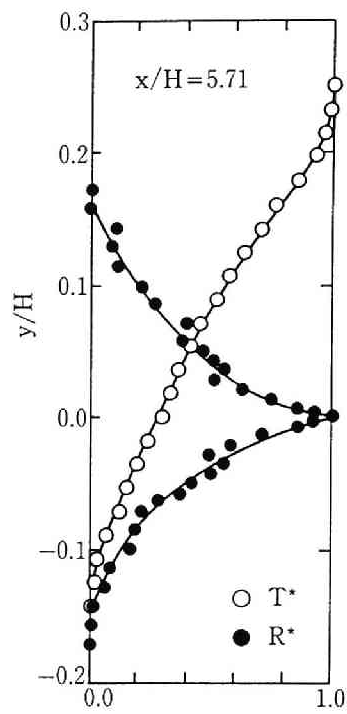


図3.1.2 平均温度と相互相関関数の分布 (RUN-S6)

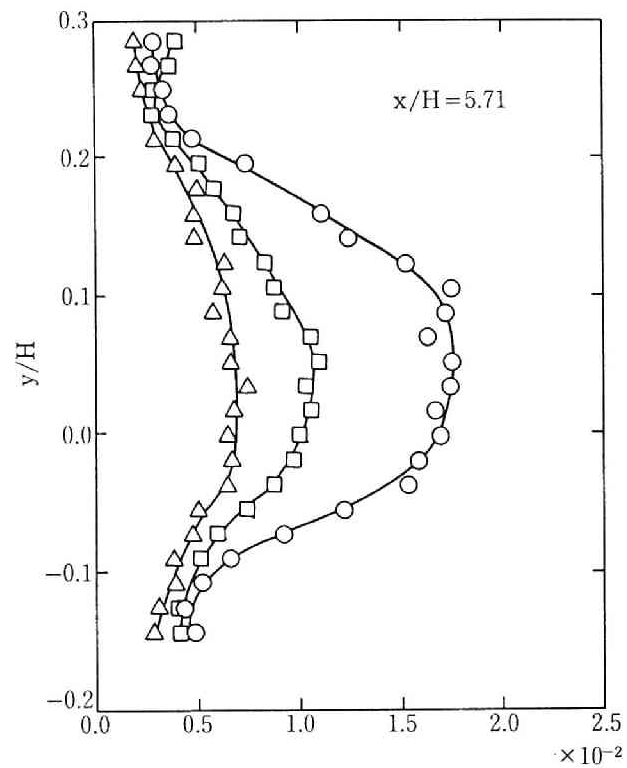


図3.1.3 流速変動量の分布 (RUN-S6:  
○  $\overline{u^2}/(U_2-U_1)^2$ ;  $\Delta$   $\overline{v^2}/(U_2-U_1)^2$ ;  $\square$   $\overline{w^2}/(U_2-U_1)^2$  )

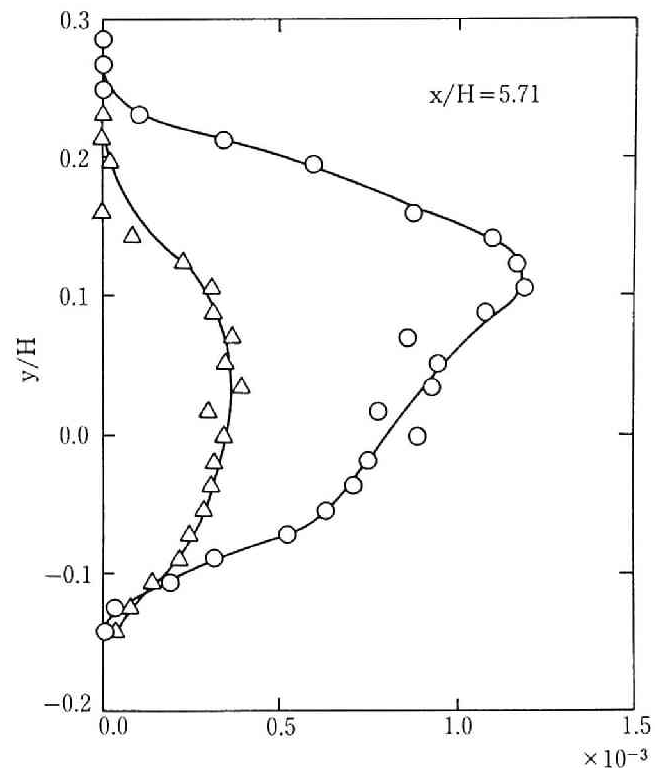


図3.1.4 乱流熱フラックスの分布 (RUN-S6:  
○  $-\overline{u\theta}/(U_2-U_1)(T_1-T_2)$ ;  $\Delta$   $-\overline{v\theta}/(U_2-U_1)(T_1-T_2)$  )

図3.1.5(a)、(b)、(c)は、それぞれRUN-S1、RUN-S4およびRUN-U1における積分特性距離 ( $L_{\theta}/H$ 、 $L_{\theta c}/H$ ) の流下方向の変化を示すものである。図3.1.5(a)に示されるRUN-S1では、流下距離に対する積分特性距離の変化は比較的小さい。一方、RUN-S4およびU1では、流下に伴い積分特性距離はほぼ一定の割合で増加する傾向を示している。(3.1.43)、(3.1.44)式より得られた  $L_{\theta}/H$ 、 $L_{\theta c}/H$  は、これらの傾向も含めて良く一致しているものと考えられる。図3.1.6は、 $L_{\theta}/H$  と  $L_{\theta c}/H$  の関係を示すものであり、結果は  $L_{\theta}/H = L_{\theta c}/H$  の直線付近にプロットされるが、本実験では比較的狭い範囲内の積分特性距離しか得られないため、より広範囲にわたる両者の比較検討を行う必要がある。また、第2章で述べたように、成層度の強い成層流では、 $\nabla \theta (\partial \Theta / \partial y)$  の符号が弱安定の成層流のものと異符号になることがあり<sup>3)</sup>、当然そのような場には代数方程式(3.1.42)式は適用できない。成層流の成層度が強まると、積分特性距離は小さい値になってゆくと考えられるが、このことから(3.1.42)式が適用できる積分特性距離の範囲には、ある下限が存在すると考えられる。このような成層度の強い成層流に対しては、(3.1.32)式の形のモデル方程式をLaunder<sup>4)</sup>が提案しているような高次の乱流モデルと組合わせて数値解析的に適用する方法が考えられる。

### 3. 2 乱れ場の影響を考慮した温度変動量の散逸率の表示式

#### 3. 2. 1 等方性乱流場における温度のスペクトル方程式

等方性乱流場における温度のスペクトル方程式は、Rotta<sup>1)</sup>により示されたエネルギー・スペクトル方程式と同様の形で導かれる。

流体中の位置  $\mathbf{x}$ 、 $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  における温度の変動成分  $\theta(\mathbf{x})$ 、 $\theta(\mathbf{x} + \mathbf{r})$  の相互相関関数  $R_{\theta\theta}$  は次式で定義される。

$$R_{\theta\theta} = \overline{\theta(\mathbf{x}) \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad \text{---(3.2.1)}$$

$R_{\theta\theta}$  に関する方程式は、(3.1.12)式と同様に、次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{\theta\theta}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial R_{\theta\theta}}{\partial r_k} + R_{\theta k'} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_{k'}} + \frac{\partial}{\partial r_k} R_{\theta k' \theta'} \\ + \overline{U_k} \left( \frac{\partial R_{\theta\theta}}{\partial x_k} - \frac{\partial R_{\theta\theta}}{\partial r_k} \right) + R_{k \theta'} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} R_{k \theta\theta} - \frac{\partial}{\partial r_k} R_{k \theta\theta} \\ - \alpha \left\{ \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}}{\partial x_k^2} - 2 \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}}{\partial x_k \partial r_k} + 2 \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}}{\partial r_k^2} \right\} = 0 \quad \text{---(3.2.2)} \end{aligned}$$

上式中で、プライムのついた変数は点  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  におけるもので、また  $\partial / \partial x_{k'}$  等は同じく点  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  における空間微分を表す。 $\overline{\Theta}$ 、 $\overline{U_k}$  は温度および流速の平均成分であり、 $u_k$  は流速の変動成分、 $\alpha$  は熱拡散係数である。また、 $R_{\theta k' \theta'}$  等は、

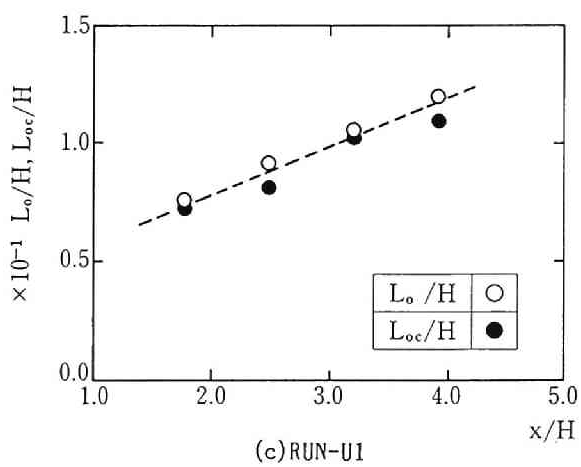
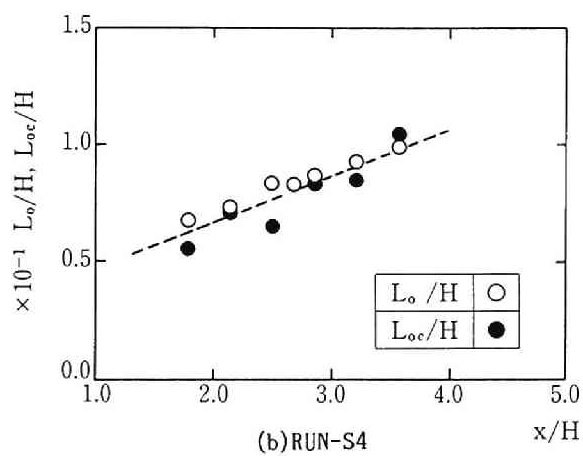
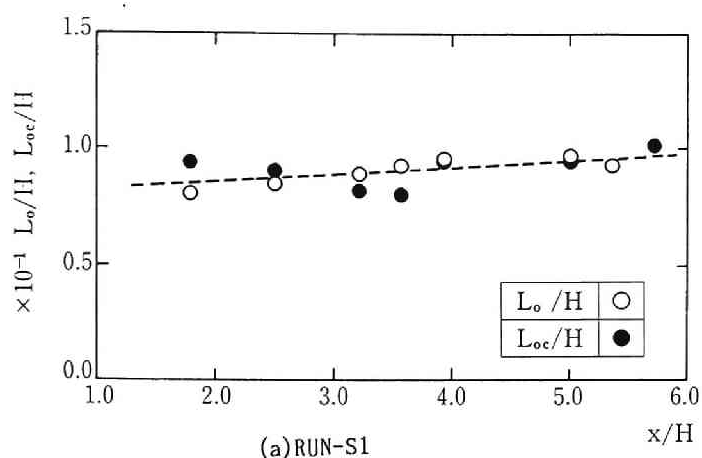


図3.1.5 積分特性距離の流下方向の変化

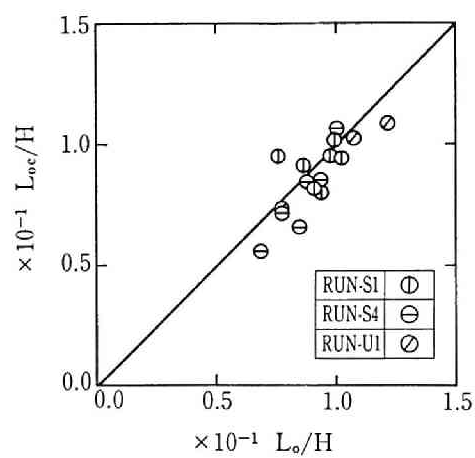


図3.1.6  $L_{\theta}/H$ と $L_{\theta c}/H$ の関係

$$R_{\theta k' \theta'} = \overline{\theta(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \theta(\mathbf{x} + \mathbf{r})} \quad \text{---(3.2.3)}$$

等と表される相関関数である。

温度相関のスペクトル関数  $\Phi_{\theta\theta}$  は、次式で定義される。

$$\Phi_{\theta\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V(\mathbf{r})} R_{\theta\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad \text{---(3.2.4)}$$

上式中の  $\mathbf{k}$  は波数ベクトルである。 $\Phi_{\theta\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  に関する方程式は、(3.2.2)式の各項に  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  を乗じ、空間積分を行うことによって得られる。"(x, k)"の表示を省略すれば、スペクトル関数の方程式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\theta\theta}}{\partial t} + i k_k \overline{U_k} \Phi_{\theta\theta} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V(\mathbf{r})} R_{\theta k'} \frac{\partial \overline{\Theta'}}{\partial x_k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ + i k_k \Phi_{\theta k' \theta'} + \overline{U_k} \left( \frac{\partial \Phi_{\theta\theta}}{\partial x_k} - i k_k \Phi_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} \Phi_{k \theta'} \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_{k \theta\theta} - i k_k \Phi_{k \theta\theta} \\ + \alpha \left( - \frac{\partial^2 \Phi_{\theta\theta}}{\partial x_k^2} + 2 i k_k \frac{\partial \Phi_{\theta\theta}}{\partial x_k} + 2 k_k^2 \Phi_{\theta\theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad \text{---(3.2.5)}$$

ここに、 $k_k$  は波数ベクトルの  $k$  成分を表し、 $\Phi_{\theta k' \theta'}$  等は、

$$\Phi_{\theta k' \theta'} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V(\mathbf{r})} R_{\theta k' \theta'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad \text{---(3.2.6)}$$

等と表わされるスペクトル関数である。

等方性乱流場では、

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\dots) = 0, \quad \overline{U_k} = \overline{U'_k} = 0, \quad \overline{\Theta} = \overline{\Theta'} = 0 \quad \text{---(3.2.7)}$$

とおけるので、 $\Phi_{\theta\theta}$  に関する一般式(3.2.5)式は、次式のように表現される。

$$\frac{\partial \Phi_{\theta\theta}}{\partial t} + i k_k \Phi_{\theta k' \theta'} - i k_k \Phi_{k \theta\theta} + 2 \alpha k_k^2 \Phi_{\theta\theta} = 0 \quad \text{---(3.2.8)}$$

波数ベクトル  $\mathbf{k}$  の絶対値  $k$  に対するスペクトル関数  $E_{\theta}(\mathbf{k}, t)$  は、 $\Phi_{\theta\theta}$  を波数空間内の半径  $k$  の球面上で積分したものであり、立体角を  $d\Omega$  とすると、

$$E_{\theta}(\mathbf{k}, t) = k^2 \oint \Phi_{\theta\theta} d\Omega \quad \text{---(3.2.9)}$$

で表される。また、 $E_{\theta}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}$  は波数  $k$ 、 $k + d\mathbf{k}$  の間の波数成分からの  $\overline{\theta^2}$  に対する寄与を表し、これを波数全域にわたって積分すれば、

$$\overline{\theta^2} = \int_0^{\infty} E_{\theta}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} \quad \text{---(3.2.10)}$$

が成り立つ。(3.2.8)式に(3.2.9)式の積分操作を行うと、 $E_{\theta}(\mathbf{k}, t)$  に関する方程式が



次のように導かれる。

$$\frac{\partial E_{\theta}(k, t)}{\partial t} + T(k, t) + 2\alpha k^2 E_{\theta}(k, t) = 0 \quad \text{---(3.2.11)}$$

ここで  $T(k, t)$  は、

$$T(k, t) = i k^2 \oint k_k (\Phi_{\theta k' \theta'} - \Phi_{k \theta \theta'}) d\Omega \quad \text{---(3.2.12)}$$

と表され、

$$\int_0^{\infty} T(k, t) dk = 0 \quad \text{---(3.2.13)}$$

なる性質を有する、波数成分間のエネルギー輸送を表す項である。一方、 $R_{\theta\theta}$ に関する方程式(3.2.2)式は、等方性乱流場では、

$$\frac{\partial R_{\theta\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} R_{\theta k \theta'} - \frac{\partial}{\partial r_k} R_{k \theta \theta'} - 2\alpha \frac{\partial^2 R_{\theta\theta}}{\partial r_k^2} = 0 \quad \text{---(3.2.14)}$$

となり、上式で  $r \rightarrow 0$  とすると、

$$\frac{d \overline{\theta^2}}{dt} + 2\alpha \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) = 0 \quad \text{---(3.2.15)}$$

が得られる。温度変動量  $\overline{\theta^2}$  の時間的な散逸率を  $\varepsilon_{\theta}$  と表すと、上式より

$$\varepsilon_{\theta} = 2\alpha \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \right) \quad \text{---(3.2.16)}$$

が成り立つ。(3.2.11)式を  $k = 0 \sim \infty$  まで積分すれば、(3.2.10)、(3.2.13)より

$$\frac{d \overline{\theta^2}}{dt} + 2\alpha \int_0^{\infty} k^2 E_{\theta}(k, t) dk = 0 \quad \text{---(3.2.17)}$$

であるので、(3.2.15)、(3.2.16)、(3.2.17)式より  $\varepsilon_{\theta}$  は

$$\varepsilon_{\theta} = 2\alpha \int_0^{\infty} k^2 E_{\theta}(k, t) dk \quad \text{---(3.2.18)}$$

とも表される。

### 3. 2. 2 等方性乱流場における温度変動量の散逸率

$L$ 、 $L_{\theta}$  をそれぞれ流速および温度に関する積分特性距離とし、無次元波数  $\chi$ 、 $\chi_{\theta}$  を次のように定義する。

$$\chi = k L \quad \text{---(3.2.19-a)}$$

$$\chi_{\theta} = k L_{\theta} \quad \text{---(3.2.19-b)}$$

また、乱れの強さに関係した乱流レイノルズ数  $Re_T$ 、乱流ペクレ数  $Pe_T$  をそれぞれ次のように定義する。

$$Re_T = \left( \frac{3}{2} \overline{u^2} \right)^{1/2} L / \nu \quad \text{---(3.2.20)}$$

$$Pe_T = \left( \frac{3}{2} \overline{u^2} \right)^{1/2} L_\theta / \alpha \quad \text{---(3.2.21)}$$

ここで、 $u$  は等方性乱流場における流速の変動成分、 $\nu$  は動粘性係数、 $\alpha$  は熱拡散係数である。Rottaが示した等方性乱流場の相似仮説を温度のスペクトル関数にも適用すれば、 $E_\theta$  は一般的に

$$E_\theta = \overline{\theta^2} L_\theta \phi_\theta(\chi_\theta, Re_T, Pe_T, \sigma_\theta) \quad \text{---(3.2.22)}$$

と表される。ここに、 $\phi_\theta$  は無次元関数であり、 $\sigma_\theta$  は温度変動場の大局的構造に関する定数である。乱れが強く、 $Re_T$  および  $Pe_T$  が十分に大きい場においては、Rottaが示した相似仮説を(3.2.22)式に用いると、無次元関数  $\phi_\theta$  に対して熱拡散係数  $\alpha$  および動粘性係数  $\nu$  の影響は小さくなり、

$$\phi_\theta = \phi_\theta(\chi_\theta, \sigma_\theta) \quad \text{---(3.2.23)}$$

となる。このような場においては、 $\gamma_{\sigma\theta}$  を大局的構造に関係する他の定数として、 $\phi_\theta$  は次式の形で表現され则认为られる。

$$\phi_\theta = \gamma_{\sigma\theta} \chi_\theta^{-5/3} \quad \text{---(3.2.24)}$$

乱れが十分に強い場において、Obukhov<sup>5)</sup>、Corrsin<sup>6)</sup>は、Kolmogorov<sup>7)</sup>の局所相似性の仮説をスカラー量のスペクトル関数に適用して、次の関係式を得た。

$$E_\theta(k) = n \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad \text{---(3.2.25)}$$

ここに  $n$  は定数である。(3.2.19)、(3.2.22)、(3.2.24)、(3.2.25)式より、乱れが十分に強い場では、 $\varepsilon_\theta$  に関する次の関係式が得られる。

$$\varepsilon_\theta = \frac{\gamma_{\sigma\theta}}{n} \frac{\overline{\theta^2}}{L_\theta^{2/3}} \varepsilon^{1/3} \quad \text{---(3.2.26)}$$

なお、上式と同様の関係式は、岩佐・細田・松井<sup>8)</sup>によっても得られている。

Rottaは、乱れの運動エネルギーの散逸率  $\varepsilon$  に関して次式を示した。

$$\varepsilon = c \frac{\left( \frac{3}{2} \overline{u^2} \right)^{3/2}}{L} \quad \text{---(3.2.27)}$$

乱れが十分に強い場合、Rottaは上式中の  $c$  が定数(0.2)に漸近することを示した。一方、乱れの状態がこれとは異なるとき、Rottaはエネルギー・スペクトル関数の相似解を Heisenberg<sup>9)</sup>の輸送モデルを用いて求め、(3.2.27)式中の  $c$  が乱流レイノルズ数  $Re_T$  の関数であることを示した。すなわち、

$$c = c(Re_T) \quad \text{---(3.2.28)}$$

このようなことから、乱れが強い場において成り立つ関係式(3.2.26)式を用いて、乱れが比較的弱い場合も含めて一般的に  $\varepsilon_\theta$  を

$$\varepsilon_{\theta} = c_1 \frac{\overline{\theta^2}}{L_{\theta}^{2/3}} \varepsilon^{1/3} \quad \text{---(3.2.29)}$$

と表すとき、 $c_1$  は定数でなく流れの場の特性を表すパラメータの関数になると考えられる。すなわち、

$$c_1 = c_1(\text{Re}_T, \text{Pe}_T, \dots) \quad \text{---(3.2.30)}$$

$c_1$  は、 $\text{Re}_T$  と  $\text{Pe}_T$  が十分大きい場合には、定数  $\gamma_{\theta\theta}/n$  に漸近することが (3.2.26) 式によりすでに示されたが、次に乱れが弱くなり、 $\text{Re}_T$  と  $\text{Pe}_T$  が 0 へ近づいた場合の  $c_1$  の値について考察する。等方性乱流場で乱れが非常に弱くなった減衰終期においては、慣性力が弱くなり、(3.2.11) 式で示されるスペクトル方程式中の輸送関数  $T(k, t)$  を無視することができる。

$$\frac{\partial E_{\theta}}{\partial t} + 2\alpha k^2 E_{\theta} = 0 \quad \text{---(3.2.31)}$$

このような状態の  $E_{\theta}(k, t)$  は上式を時間積分することにより求められ、Hinze は次式を導いた。

$$E_{\theta}(k, t) = c_0 k^2 \exp(-2\alpha k^2 t) \quad \text{---(3.2.32)}$$

ここに  $c_0$  は定数である。また、同様の場において、Hinze<sup>10)</sup> は積分特性距離  $L_{\theta}$  に関して、

$$L_{\theta}^2(t) = 2\pi\alpha t \quad \text{---(3.2.33)}$$

なる関係式を示した。(3.2.32)、(3.2.33) 式より  $t$  を消去すれば、

$$E_{\theta}(k) = c_0 k^2 \exp\left(-\frac{1}{\pi} k^2 L_{\theta}^2\right) \quad \text{---(3.2.34)}$$

が得られる。一方、上式と (3.2.10) 式より、

$$\begin{aligned} \overline{\theta^2} &= \int_0^{\infty} E_{\theta}(k) dk = c_0 \int_0^{\infty} k^2 \exp\left(-\frac{1}{\pi} k^2 L_{\theta}^2\right) dk \\ &= c_0 \frac{\pi^2}{4} L_{\theta}^3 \end{aligned} \quad \text{---(3.2.35)}$$

となる。従って、 $c_0$  は

$$c_0 = \frac{4}{\pi^2} \overline{\theta^2} L_{\theta}^3 \quad \text{---(3.2.36)}$$

で与えられる。これらのことから、乱れが非常に弱い場での  $\varepsilon_{\theta}$  は、(3.2.18) 式と (3.2.34)、(3.2.36) 式により、次のように求められる。

$$\varepsilon_{\theta} = 2\alpha \int_0^{\infty} k^2 E_{\theta}(k) dk = 3\pi\alpha \overline{\theta^2} L_{\theta}^2 \quad \text{---(3.2.37)}$$

また、(3.2.27)、(3.2.29) 式より  $\varepsilon$  を消去すると、

$$\varepsilon_{\theta} = c_1 c^{-1/3} \lambda^{-1/3} \frac{\theta^2 \left(\frac{3}{2} u^2\right)^{1/2}}{L_{\theta}} \quad \text{---(3.2.38)}$$

が得られる。ここに $\lambda$ は積分特性距離の比の値で、

$$\lambda = \frac{L}{L_{\theta}} \quad \text{---(3.2.39)}$$

である。(3.2.37)式を(3.2.38)式に代入して $\varepsilon_{\theta}$ を消去すれば、 $c_1$ に関する次式が得られる。

$$c_1 = 3\pi c^{-1/3} \lambda^{1/3} \frac{\alpha}{L_{\theta} \left(\frac{3}{2} u^2\right)^{1/2}} \quad \text{---(3.2.40)}$$

上式より $c_1$ は(3.2.21)式で定義される乱流ペクレ数の関数となっており、 $Pe_T$ を用いれば、

$$c_1 = 3\pi c^{-1/3} \lambda^{1/3} \frac{1}{Pe_T} \quad \text{---(3.2.41)}$$

と表される。Rottaは、乱れが非常に弱くなった場合( $Re_T \rightarrow 0$ )の $c$ と $Re_T$ の関係を表す次式を求めた。

$$c(Re_T) = \frac{5\pi}{4} \frac{1}{Re_T} \quad \text{---(3.2.42)}$$

従って、 $Re_T$ と $Pe_T$ がともに0へ近づく場合には、 $c_1$ は

$$c_1 = 3\pi \left(\frac{5\pi}{4} \frac{1}{Re_T}\right)^{-1/3} \lambda^{1/3} \frac{1}{Pe_T} \quad \text{---(3.2.43)}$$

へ漸近する。このため、 $Re_T$ および $Pe_T$ が比較的小さい値となったとき、 $c_1$ に対して $Re_T$ と $Pe_T$ の影響が生じてくると考えられる。

### 3. 2. 3 温度のスペクトル方程式の相似解に関する基礎式

Rotta<sup>11)</sup>は等方性乱流場におけるエネルギースペクトル関数に対してHeisenberg<sup>9)</sup>の輸送モデルを用いてその相似解を求めた。ここでは、これとほぼ同様の手法により、温度のスペクトル関数の相似解を得るための方程式を導き、等方性乱流場における一般的な $c_1$ の表示式の導出を試みる。

Hinze<sup>10)</sup>は(3.2.1)式で表される温度の相互相関関数 $R_{\theta\theta}$ を用いて等方性乱流場における温度のスペクトル関数 $E_{\theta}$ を次のような級数の形で表した。

$$E_{\theta} = \frac{2}{\pi} \left( k^2 \int_0^{\infty} r^2 R_{\theta\theta} dr + \dots \right) \quad \text{---(3.2.44)}$$

また、同じくHinzeは次の積分値 $A_{\theta 1}$ が不変量であることを示した。

$$A_{\theta 1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r^2 R_{\theta\theta} dr = \text{const.} \quad \text{---(3.2.45)}$$

これらのことから、Rotta と同様の考察を行うと次の不変量  $A_{\theta}$  が存在すると考えられる。。。。

$$A_{\theta} = a_{\theta} \overline{\theta^2} L_{\theta}^{\gamma+1} = \text{const.} \quad \text{---(3.2.46)}$$

ここで、

$$\gamma = 2 \quad \text{---(3.2.47)}$$

であり、 $a_{\theta}$  はある定数である。(3.2.11)式を積分表示式とした場合に、その左辺第1項は(3.2.46)式を用いて次のように変形される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E_{\theta}(k, t) dk &= \frac{d \overline{\theta^2}}{dt} \left( \int_0^{\chi_{\theta}} \psi_{\theta} d\chi_{\theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1+\gamma} \psi_{\theta} \chi_{\theta} \right) \end{aligned} \quad \text{---(3.2.48)}$$

さらに、(3.2.11)式の左辺第2項の輸送項に対してPao<sup>[11]</sup>により示された輸送モデルを用いると、その積分形は次のように表される。

$$\int_0^k T(k, t) dk = m^{-1} \varepsilon^{1/3} k^{5/3} E_{\theta}(k, t) \quad \text{---(3.2.49)}$$

ここに  $m$  は定数である。また、これとは別にHeisenbergの輸送モデルを用いれば、Hinzeにより示された結果を用いて次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^k T(k, t) dk &= \kappa_{\theta} \int_k^{\infty} \left\{ \frac{E(k, t)}{k^3} \right\}^{1/2} dk \\ &\quad \cdot \int_0^k 2k^2 E_{\theta}(k, t) dk \end{aligned} \quad \text{---(3.2.50)}$$

ここに  $\kappa_{\theta}$  は定数、 $E(k, t)$  はエネルギースペクトル関数である。(3.2.49)、(3.2.50)式より、相似解  $\psi_{\theta}$  を求めるための基礎方程式はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} c_{\tau} \left( \int_0^{\chi_{\theta}} \psi_{\theta} d\chi_{\theta} - \frac{1}{1+\gamma} \psi_{\theta} \chi_{\theta} \right) \\ = m^{-1} c^{1/3} \chi_{\theta}^{5/3} \psi_{\theta} + \lambda^{1/3} \frac{2}{Pe_{\tau}} \int_0^{\chi_{\theta}} \chi_{\theta}^2 \psi_{\theta} d\chi_{\theta} \end{aligned} \quad \text{---(3.2.51)}$$

$$\begin{aligned} c_{\tau} \left( \int_0^{\chi_{\theta}} \psi_{\theta} d\chi_{\theta} - \frac{1}{1+\gamma} \psi_{\theta} \chi_{\theta} \right) \\ = \kappa_{\theta} \lambda^{4/3} \int_{\chi}^{\infty} \left( \frac{\psi}{\chi^3} \right)^{1/2} d\chi \int_0^{\chi_{\theta}} 2\chi_{\theta}^2 \psi_{\theta} d\chi_{\theta} \\ + \lambda^{1/3} \frac{2}{Pe_{\tau}} \int_0^{\chi_{\theta}} \chi_{\theta}^2 \psi_{\theta} d\chi_{\theta} \end{aligned} \quad \text{---(3.2.52)}$$

(3.2.52) 式中の  $\psi$  はエネルギースペクトル関数の相似解である。これらの式中の  $c_{\tau}$  は、 $c_1$  および  $c$  あるいは相似解  $\psi_{\theta}$  と次の関係がある。

$$c_T = c_1 c^{1/3} \quad \text{---(3.2.53)}$$

および

$$c_T = \frac{2\lambda}{Pe_T} \int_0^\infty \chi^2 \phi_\theta d\chi_\theta \quad \text{---(3.2.54)}$$

従って、Rottaが示した $c$ と $Re_T$ の関係等を用いて、(3.2.51)式あるいは(3.2.52)式を(3.2.54)式と連立させて解くことにより相似解 $\phi_\theta$ が求められ、その結果に(3.2.53)式を用いて等方性乱流場における一般的な $c_1$ の表示式が得られると考えられる。しかしながら、ここでは $c_1$ に対する近似的な表示を行い、相似解 $\phi_\theta$ の挙動を調べた。まず、 $c$ と $Re_T$ の関係にはRottaが示した結果に対する近似式として次の関係式を用いる。

$$c = \frac{5\pi}{4} \frac{1}{Re_T} \frac{1+0.06Re_T}{1+0.01Re_T} + 0.2 \quad \text{---(3.2.55)}$$

上式とRottaの結果を図3.2.1に示した。両者はほぼ一致している。一方、 $c_1$ に対しては $Pe_T$ が無限大あるいは0に漸近した場合の表示式(3.2.26)、(3.2.41)式を用いて簡単に次式で表現されると仮定した。

$$c_1 = 3\pi c^{-1/3} \lambda^{1/3} \frac{1}{Pe_T} + \frac{\gamma_\theta}{n} \quad \text{---(3.2.56)}$$

上式で表される $c_1$ は、 $Pe_T \rightarrow \infty$ で(3.2.26)式、 $Pe_T \rightarrow 0$ で(3.2.41)式に近づく。 $\gamma_\theta$ の値は明らかでないが、後述するように、GibsonとLaunder<sup>12)</sup>の結果を用いると、 $\gamma_\theta/n$ は0.43という値になる。(3.2.55)、(3.2.56)式を用いて、 $\gamma=2$ 、 $\gamma_\theta/n=0.43$ 、 $\lambda=1$ とした場合のいくつかの $Re_T$ および $Pe_T$ ( $Re_T=Pe_T$ )に対する、(3.2.51)式から得られる $\phi_\theta$ と $\chi_\theta$ の関係を図3.2.2に示した。(3.2.51)式の解を求める際には細田ら<sup>13)</sup>と同様の数値積分を行った。(3.2.56)式の $c_1$ の表示は仮定として得られたものであるが、得られた $\phi_\theta$ の分布を用いて(3.2.54)式より求められる $c_T$ の値と、(3.2.53)式から求められる $c_T$ の値との誤差は $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 程度のオーダーと小さいものとなっている。

### 3.2.4 成層流における温度変動量の散逸率の表示式

Launder<sup>4)</sup>は、成層流中の温度変動量の散逸率 $\varepsilon_\theta$ に対して、次のようなモデル化を行った。

$$\frac{1}{2} \varepsilon_\theta = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{1}{c_T} \frac{\varepsilon \theta^2}{q} \quad \text{---(3.2.57)}$$

ここに $c_T$ は係数である。GibsonとLaunder<sup>12)</sup>は、(3.2.57)式中の $c_T$ が、流速および温度変動量の減衰時間に関連した特性量の比の値であると考えて、既往の実験結果からこれを定数(1.6)とした。一方、(3.2.57)式と同様の関係式は、これまでに導いた等方性乱流場における諸関係式からも導かれる。すなわち、(3.2.27)、(3.2.29)、(3.2.39)式より、 $L$ と $L_\theta$ を消去して、

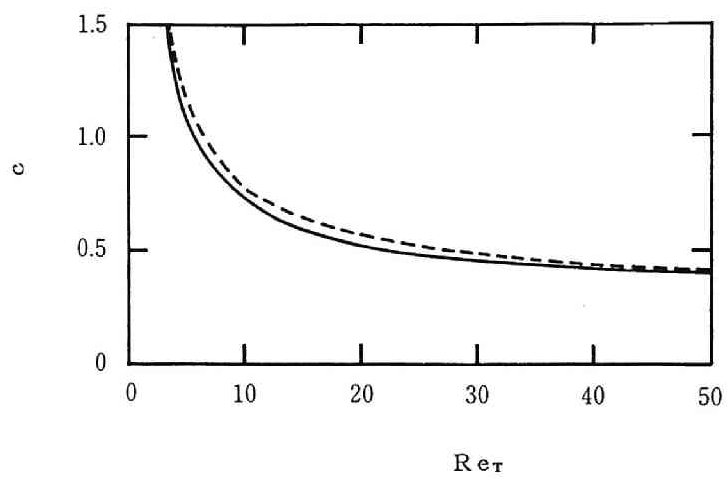


図3.2.1  $c$ と $Re_T$ の関係(— Rotta; ..... (3.2.55)式)

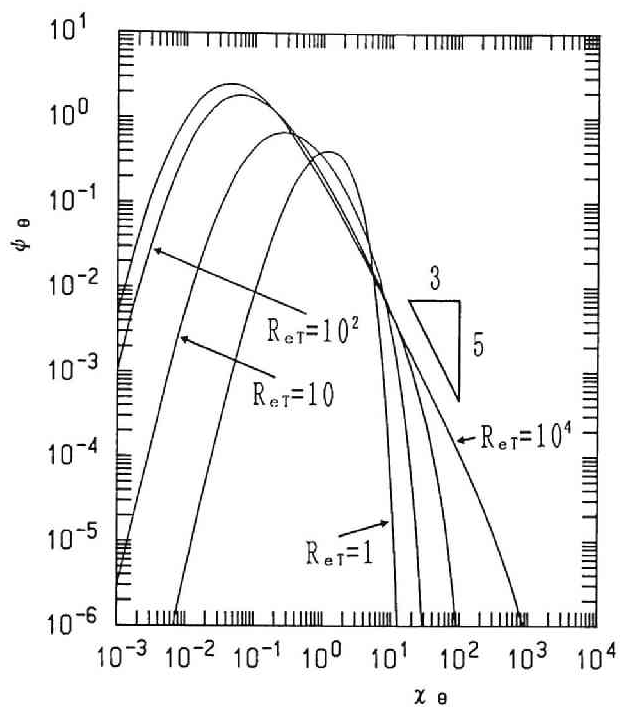


図3.2.2  $\phi_\theta$  と  $\chi_\theta$  との関係

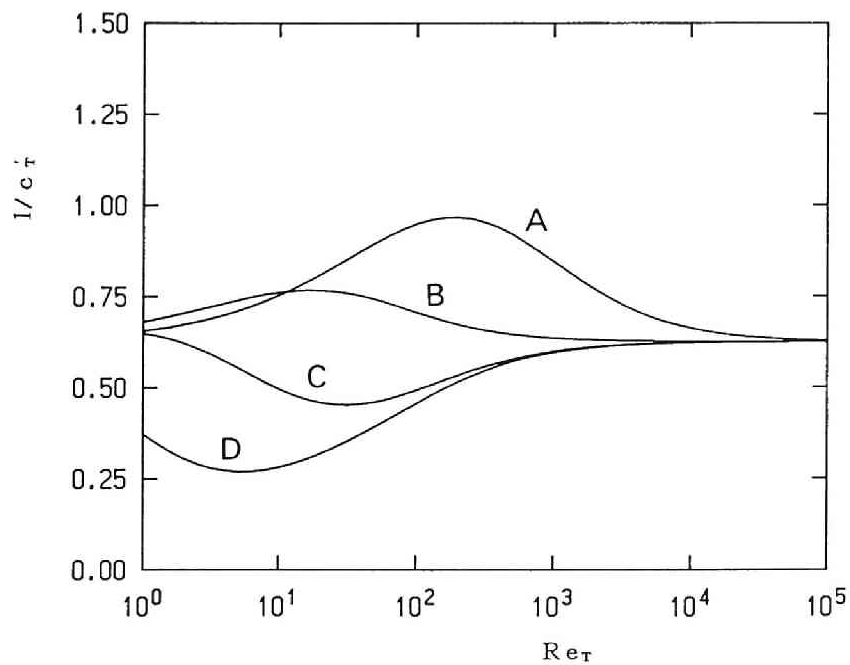


図3.2.3  $1/c_\tau^{\pm}$  と  $Re_\tau$  の関係



$$\varepsilon_{\theta} = c_1 c^{-2/3} \lambda^{2/3} \frac{\overline{\varepsilon \theta^2}}{\left(\frac{3}{2} \overline{u^2}\right)} \quad \text{---(3.2.58)}$$

が得られる。ここで  $(3/2) \overline{u^2} = q$  とおけば、上式と (3.2.57) 式より、

$$c_T = 2 c_1^{-1} c^{2/3} \lambda^{-2/3} \quad \text{---(3.2.59)}$$

なる関係が得られる。これまでの考察から、 $Re_T$  および  $Pe_T$  が十分大きい場では上式中の  $c_1$  および  $c$  はある定数に漸近するため  $c_T$  も定数となり得るが、より一般的には、 $c_T$  は乱流レイノルズ数  $Re_T$ 、乱流ペクレ数  $Pe_T$  および積分特性距離の比  $\lambda$  の関数であると考えられる。

なお、Gibson と Launder により示された  $c_T = 1.6$  という値が、 $Re_T$  および  $Pe_T$  が十分大きい場で得られたものと考え、さらに  $\lambda \cong 1$ 、 $c = 0.2$  とすれば、(3.2.59) 式より  $c_1$  は 0.43 となることから、 $\gamma_{\theta} / n$  は 0.43 という値に見積もられる。

等方性乱流場を対象として得られた (3.2.55)、(3.2.56) 式に示されるような結果を考慮して、 $c$  および  $c_1$  は成層流中で次のような形で表され则认为る。

$$c = \frac{a_1}{Re_T} + a_2 \quad \text{---(3.2.60)}$$

$$c_1 = c^{-1/3} \lambda^{1/3} \frac{b_1}{Pe_T} + b_2 \quad \text{---(3.2.61)}$$

ここで、 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $b_1$  および  $b_2$  は、ある定数である。積分特性距離  $L$  および  $L_{\theta}$  に関しては、前者は Rotta<sup>11)</sup> により、また後者は 3.1 で、すでにこれらに対する輸送方程式が得られている。これらの結果から、十分に発達した成層流中では次のような代数方程式が導かれる。

$$L = \frac{C_L q^{3/2}}{-\overline{u_1 u_3} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3}} \cong \frac{C_L q^{3/2}}{\varepsilon} \quad \text{---(3.2.62)}$$

$$L_{\theta} = \frac{C_{L\theta} q^{1/2} \overline{\theta^2}}{-\overline{u_3 \theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_3}} \cong \frac{C_{L\theta} q^{1/2} \overline{\theta^2}}{\frac{1}{2} \varepsilon_{\theta}} \quad \text{---(3.2.63)}$$

ここで、 $C_L$  と  $C_{L\theta}$  は定数で、それぞれ 0.12 および 0.36 である。これらの関係式に (3.2.57) 式を用いれば、 $\lambda$  に対して次式が得られる。

$$\lambda = \frac{L}{L_{\theta}} = \frac{1}{6} \frac{\varepsilon_{\theta} q}{\overline{\varepsilon \theta^2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{c_T} \quad \text{---(3.2.64)}$$

特に、Launderによって示された $c_T$ の値(1.6)が、十分に発達した成層流中で得られたものと考え、 $\lambda$ は上式より次のような値となる。

$$\lambda = \frac{1}{4.8} \equiv \lambda_0 \quad \text{--- (3.2.65)}$$

一方、乱れが十分に弱くなった場合には、等方性乱流場を対象としたHinze<sup>10)</sup>による流速と温度の積分スケール $\Lambda_r$ 、 $\Lambda_\theta$ の比 $\Lambda$ は次式のような形となる。

$$\Lambda = \frac{\Lambda_r}{\Lambda_\theta} = Pr^{1/2} \quad \text{--- (3.2.66)}$$

この関係式に対し、 $L$ および $L_\theta$ を用いれば、乱れが十分弱い場に対して次式が得られる。

$$\lambda = 4 Pr^{1/2} \quad \text{--- (3.2.67)}$$

(3.2.65)、(3.2.66)式を考慮して、次のような関係式で $\lambda$ が表されると仮定する。

$$\lambda^2 = 16 Pr \frac{a_1 + a_2 Re_T}{a_1 + 16 a_2 Pr Re_T \lambda_0^2} \quad \text{--- (3.2.68)}$$

上式は、 $Re_T \rightarrow \infty$ で(3.2.65)式、 $Re_T \rightarrow 0$ で(3.2.67)式に漸近する形となる。(3.2.68)式を用いると、(3.2.59)式で表される $c_T$ は、(3.2.60)、(3.2.61)式を用いて次のように表示される。

$$\frac{1}{c_T} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{b_1}{a_1 + a_2 Pr Re_T \lambda_0^2} + b_2 \left( \frac{\lambda Re_T}{a_1 + a_2 Re_T} \right)^{2/3} \right\} \quad \text{--- (3.2.69)}$$

なお、上式を導く際に、 $Pe_T$ に対する次の関係式を用いている。

$$Pe_T = \frac{Pr}{\lambda} Re_T \quad \text{--- (3.2.70)}$$

ところで、 $Re_T \rightarrow \infty$ の時に $1/c_T \rightarrow 1/1.6$ となるためには、 $a_2$ と $b_2$ は次のような関係を満足せねばならない。

$$b_2 = \frac{2}{1.6} \left( \frac{a_2}{\lambda_0} \right)^{2/3} \quad \text{--- (3.2.71)}$$

また、(3.2.69)式では、 $Re_T \rightarrow 0$ となる時に、 $1/c_T$ は次のような値になる。

$$\frac{1}{c_T} = \frac{1}{2} \frac{b_1}{a_1} \quad \text{--- (3.2.72)}$$

従って、 $\varepsilon_\theta$ は(3.2.57)式に(3.2.68)式および(3.2.69)式を用いた形で表示される。

Hanjalić ら<sup>14)</sup>が用いている乱流レイノルズ数 $R_T$ は次式で定義される。

$$R_T = \frac{q^2}{\nu \varepsilon} \quad \text{--- (3.2.73)}$$

(3.2.20)式で定義される $Re_T$ は、十分に発達した成層流中では、(3.2.62)式を用いると $R_T$ と次の関係があることが示される。

$$Re_T = C_L R_T \quad \text{--- (3.2.74)}$$

上式の関係が一般的な場においても成り立つと仮定すれば、(3.2.68)式および(3.2.69)式

は、 $R_T$ を用いてそれぞれ次のように表される。

$$\lambda^2 = 16 Pr \frac{a_1 + a_2 C_L R_T}{a_1 + 16 a_2 Pr C_L R_T \lambda_0^2} \quad \text{--- (3.2.75)}$$

$$\frac{1}{c_T} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{b_1}{a_1 + a_2 Pr C_L R_T \lambda_0^2} + b_2 \left( \frac{\lambda C_L R_T}{a_1 + a_2 C_L R_T} \right)^{2/3} \right\} \quad \text{--- (3.2.76)}$$

また、未定係数に関する(3.2.71)式と(3.2.72)式の条件は、上式中でも同様のものとなっている。これらの未定係数は、より詳細な実験や数値解析上の最適化等を通じて定めることが必要であるが、ここでは係数値として以下のような等方性乱流場で得られた値を用いて、(3.2.69)式あるいは(3.2.76)式の定性的な傾向を検討する。

$$a_1 = \frac{5\pi}{4} \quad \text{--- (3.2.77-a)}$$

$$a_2 = 0.2 \quad \text{--- (3.2.77-b)}$$

$$b_1 = \frac{2a_1}{c_{T0}} \quad \text{--- (3.2.77-c)}$$

$$b_2 = \frac{2}{1.6} \left( \frac{a_2}{\lambda_0} \right)^{2/3} \quad \text{--- (3.2.77-d)}$$

ここで(3.2.77-c)式および(3.2.77-d)式は、それぞれ(3.2.72)式と(3.2.71)式に従うもので、 $c_{T0}$ は $Re_T \rightarrow 0$ となる時の $c_T$ の値に相当する。 $c_{T0}$ の値を1.6として、(3.2.75)式と(3.2.76)式から得られるいくつかの $Pr$ の下での $1/c_T$ と $R_T$ との関係を図3.2.3に示した。これらの $Pr$ の条件は表3.2.1に示されるとおりである。

表3.2.1 プラントル数の値

\ CASE	A	B	C	D
Pr	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$10^1$

$1/c_T$ の定性的な挙動として、 $Pr$ が比較的小さい時には、 $R_T$ が十分大きい値から減少するに従い $1/c_T$ は増加し、 $Pr$ が比較的大きい値の時には逆に減少する傾向を示す。 $R_T$ がさらに小さくなるにつれて、 $1/c_T$ は $1/c_{T0}$ へ漸近してゆく。この $c_{T0}$ の値は明確ではないが、このような領域では $R_T$ がかなり小さいため、乱流モデルによる数値解析上では解に対する $1/c_T$ の挙動の影響は場合によっては問題とならないかもしれない。

### 3.3 成層流の乱流プラントル数

#### 3.3.1 乱れ場の影響を考慮した乱流プラントル数の表示式

ここでは、Launder<sup>4)</sup>によって示された成層流中の乱流プラントル数に関する関係式をもとにして、これまでの結果を用いて乱れ場の影響が乱流プラントル数にどのように及ぼされるのかという点について検討を行う。

Lauderは、十分に発達した成層流中において、レイノルズ応力および乱流熱フラックスに関する次のようなモデル式を導いた。

$$\overline{(u_i u_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} q)} / q = \phi (P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P) / \varepsilon \quad \text{---(3.3.1)}$$

$$\begin{aligned} -\overline{u_i \theta} &= \phi_T \frac{q}{\varepsilon} \overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} \\ &+ \phi_T' \frac{q}{\varepsilon} \overline{u_k \theta} \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - c_{1T} \beta F_i \frac{q}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad \text{---(3.3.2)}$$

上式中で、 $\phi$ 、 $\phi_T$ および $\phi_T'$ は係数であり、次のように表される。

$$\phi = (1 - c_2) / c_1, \quad \phi_T = 1 / c_{1T}, \quad \phi_T' = \phi_T (1 - c_{2T}) \quad \text{---(3.3.3)}$$

ここに $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_{1T}$ および $c_{2T}$ は係数である。これらの係数の値を表3.3.1に示した。

表3.3.1 係数値

$c_1$	$c_2$	$c_{1T}$	$c_{2T}$	$\phi$	$\phi_T'$	$\phi_T$
2.0	0.6	3.2	0.5	0.2	$\frac{1}{2} \phi_T$	$\frac{1}{3.2}$

また、 $q$ は乱れの運動エネルギーで、

$$q = \frac{1}{2} \overline{u_k u_k} \quad \text{---(3.3.4)}$$

であり、 $P$ は次式で示される。

$$P = -(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \beta F_i \overline{u_i \theta}) \quad \text{---(3.3.5)}$$

サフィックス1、2、3をそれぞれ成層流の流下方向、横断方向、鉛直上方向とすれば、次式で表わされる無次元の渦動粘性係数および乱流熱拡散係数に相当するパラメータ $\beta'$ と $\gamma'$

$$-\overline{u_i u_3} = \beta' \frac{\overline{u_3^2 q}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_3} \quad \text{---(3.3.6)}$$

$$-\overline{u_3 \theta} = \gamma' \frac{\overline{u_3^2 q}}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_3} \quad \text{---(3.3.7)}$$

に対して、Lauderは、(3.3.1)、(3.3.2)式より、次の関係式を得た。

$$\beta' = \phi \{ 1 + \phi (\phi_T + \phi_T' \gamma' / \beta') B \}^{-1} \quad \text{---(3.3.8)}$$

$$\gamma' = \phi_T (1 + \phi_T' c_1' B)^{-1} \quad \text{---(3.3.9)}$$

ここに、 $B$ は浮力の効果を表すパラメータで、(2.2.24)式で定義されるものである。すなわち、

$$B = \beta g \left( \frac{q}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \quad \text{--- (3.3.10)}$$

また、乱流プラントル数  $Pr_t$  に対して、等温状態 ( $B = 0$ ) の  $Pr_t$  を  $Pr_{t0}$  として、

$$\frac{Pr_{t0}}{Pr_t} = \frac{\gamma'}{\beta'} = \frac{1 + \phi \phi_T B}{1 + \phi_T (c_T - \phi_T) B} \quad \text{--- (3.3.11)}$$

なる関係式をLaunderは導いた。前節までの考察から、(3.2.69)式あるいは(3.2.76)式に示されたように、上式中の  $c_T$  は一般的にはGibsonとLaunder<sup>12)</sup>が仮定したような普遍的な定数ではなく、乱流レイノルズ数等の関数であると考えられる。このため、(3.3.8)、(3.3.9)式で表される乱流拡散係数  $\beta'$  および  $\gamma'$ 、また(3.3.11)式で表わされる乱流プラントル数に対して、乱流レイノルズ数などの乱れ場の特性量が影響を及ぼすことになる。

なお、Launderが示した(3.3.8)、(3.3.9)、(3.3.11)式の関係は、乱れが十分強い場におけるものと考えると  $\varepsilon_\theta$  に関係する係数  $c_T$  以外のところにも乱流レイノルズ数等の影響を考慮することが必要となると考えられる。(3.3.8)、(3.3.9)、(3.3.11)式に関係するのは、レイノルズ応力の輸送方程式中のPressure-Strain項と乱流熱フラックスの輸送方程式中のPressure-Scrambling項である。前者に対しては、Hanjalic ら<sup>14)</sup>は乱流レイノルズ数の効果を考慮していないため、ここではこれらの項に対する乱れ場の影響は考慮しないものとする。

### 3.3.2 実験結果との比較検討

3.2.4では、乱れ場の影響を考慮した成層流中の  $c_T$  の表示式について考察を行った。ここではその結果、すなわち(3.2.75)式および(3.2.76)式を用いた場合の乱流プラントル数の挙動について考察を行う。係数値が(3.2.77)式で与えられるものとして、下表のような条件下におけるいくつかの  $Pr_{t0}/Pr_t$  と  $B$  の関係を求めた。これを図3.3.1に示す。

表3.3.2  $Pr$  と  $R_T$  の条件

\ CASE	A	B	C	D	E
$Pr$	$10^0$	$10^1$	$10^1$	$10^{-2}$	$10^{-2}$
$R_T$	$\infty$	$10^2$	$10^1$	$10^3$	$10^2$

表3.3.2中のCASE-Aでは  $R_T = \infty$  であるため  $c_T = 1.6$  であり、この条件における  $Pr_{t0}/Pr_t$  と  $B$  の関係はLaunderが求めた関係に相当するものとなっている。 $Pr = 10^1$  の条件下では、 $R_T$  が減少するにつれ、 $Pr_{t0}/Pr_t$  と  $B$  の関係は下方に位置するようになる。図3.3.2に  $Pr_{t0}/Pr_t$  と  $R_T$  の関係に関する既往の実験結果<sup>15), 16), 17), 18)</sup>を示した。図3.3.2よりKomori<sup>16)</sup>の実験結果はLaunderの関係式よりも下方に位置するものとなっている。Komoriの実験では成層流のせん断領域の鉛直方向のスケールおよび乱れ強度が比較的小さく、乱流レイノルズ数が小さいと推測されるが<sup>19)</sup>、このことを考慮すれば図3.3.1中の

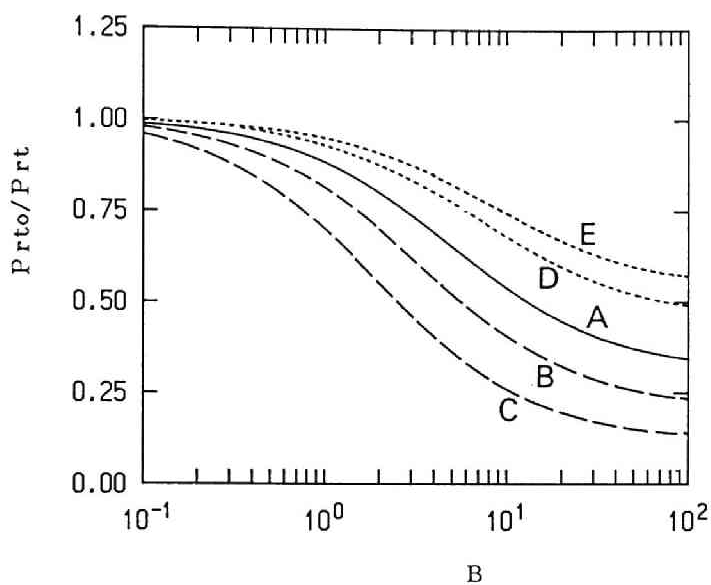


図3.3.1 モデル式から得られた $Pr_{to}/Pr_t$ と $B$ の関係

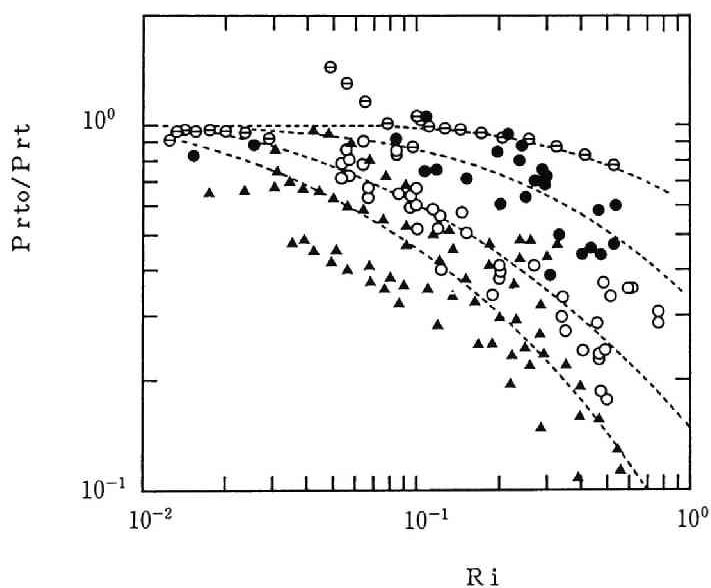


図3.3.2 実験結果から得られた $Pr_{to}/Pr_t$ と $Ri$ の関係

( ○ 牛島<sup>15)</sup>, ▲ Komori<sup>16)</sup>, ● Webster<sup>17)</sup>, Θ Iritani<sup>18)</sup> )

CASE-BあるいはCASE-Cはこの傾向を定性的に適切に表現していると考えられる。一方、図3.3.1のCASE-DおよびCASE-Eの結果に示されるように、 $Pr=10^{-2}$ の条件の下では、 $R_T$ が低下するに従い $Pr_{to}/Pr_t$ とBの関係はLaunderの関係よりも上方に位置するようになる。図3.3.2中には液体ナトリウムを試験流体とした場合の結果<sup>18)</sup>が示してあるが、CASE-DおよびCASE-Eの結果はこれと定性的に一致するものとなっている。

### 3. 4 温度のスペクトル方程式のモデル式

細田ら<sup>13)</sup>は、エネルギースペクトルの方程式にPao<sup>11)</sup>のモデルを用いて解析可能な方程式を導いた。ここでは、温度のスペクトルの方程式に対して、同様にスカラー量に対して導かれたPaoのモデルを用いて、方程式を適当に無次元化することにより解析可能な形とした場合の結果について述べる。乱流レイノルズ数 $R_T$ 、乱流ペクレ数 $P_T$ を次のように定義する。

$$R_T = \frac{q^2}{\nu \varepsilon} \quad \text{---(3.4.1)}$$

$$P_T = \frac{\overline{q \theta^2}}{\alpha \varepsilon \theta} \quad \text{---(3.4.2)}$$

$R_T$ の定義は(3.2.73)式と同様である。また、無次元波数 $k'$ を次のように定義する。

$$k' = q^{-1/2} \varepsilon \theta^{-2} k \quad \text{---(3.4.3)}$$

さらに、無次元の温度変動のスペクトル関数 $E_{\theta}$ を次のように定める。

$$E_{\theta} = q^{-1/2} \varepsilon \theta (\theta^2)^{-2} E_{\theta} \quad \text{---(3.4.4)}$$

Paoのモデルを用いた無次元のスペクトル関数の方程式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{k'}{1+\gamma} + m^{-1} \left( \frac{1}{Pr} \frac{P_T}{R_T} \right)^{1/3} k'^{5/3} \right\} \frac{dE_{\theta}}{dk'} \\ &= \left\{ \frac{\gamma}{1+\gamma} - \frac{5}{3} m^{-1} \left( \frac{1}{Pr} \frac{P_T}{R_T} \right)^{1/3} k'^{2/3} - \frac{2}{P_T} k'^2 \right\} E_{\theta} \end{aligned} \quad \text{---(3.4.5)}$$

上式は数値積分により近似的に解くことが可能である。 $P_T/R_T$ の値に関して次の関係が導かれる。

$$\frac{P_T}{R_T} = \frac{\overline{q \theta^2}}{\alpha \varepsilon \theta} \frac{\nu \varepsilon}{q^2} = P_T \frac{\overline{\varepsilon \theta^2}}{\varepsilon \theta q} \quad \text{---(3.4.6)}$$

また、Launder<sup>4)</sup>が示した(3.2.57)式

$$\frac{1}{2} \varepsilon \theta = \frac{1}{c_T} \frac{\overline{\varepsilon \theta^2}}{q} \quad \text{---(3.4.7)}$$

を(3.4.6)式に用いれば、(3.4.5)式中の $P_T(P_T R_T)^{-1}$ の値は次のように表される。

$$\frac{1}{Pr} \frac{Pr}{R_T} = \frac{1}{2} c_i \quad \text{--- (3.4.8)}$$

3.2.4の考察により、上式中の $c_i$ は $R_T$ と $Pr$ の関数であることが示されている。従って、(3.2.75)式と(3.2.76)式を用いれば、 $Pr(R_T Pr)^{-1}$ は $R_T$ と $Pr$ の関数として表される。係数値として(3.2.77)式の値を用いて、下表のような条件下における $E_\theta$ と $k'$ の関係を求めた。CASE-A～Cの結果を図3.4.1に、また条件D～Fの結果を図3.4.2に示す。

表3.4.1  $Pr$ と $R_T$ の条件

\ CASE	A	B	C	D	E	F
$Pr$	$10^1$	$10^1$	$10^1$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$
$R_T$	$10^5$	$10^2$	$10^1$	$10^5$	$10^3$	$10^2$

図3.4.1および図3.4.2に示された結果から、 $R_T$ が十分大きい条件下では、 $Pr=10^1$ および $Pr=10^{-2}$ のどちらの場合でも、 $E_\theta$ が $k'^{-5/3}$ に比例する領域が存在するが、 $R_T$ が低下するに従い、高波数領域における $E_\theta$ の減衰が大きくなる傾向が見られる。この傾向は特に $Pr=10^{-2}$ なるCASE-EおよびCASE-Fでより顕著であるが、これは(3.4.8)式から得られる $Pr$ が比較的小さい値となり、(3.4.5)式中の $E_\theta$ を減衰させる項が相対的に大きく作用するようになるためであると考えられる。

### 3.5 まとめ

本章では、成層流の温度場に関する乱流特性量のモデル表示式の提案等を行った。

3.1では成層流の温度の相互相関関数から得られる積分特性距離の輸送方程式を導き、そのモデル化を行った。さらに、このモデル化された方程式中の生成項と散逸項の係数を実験結果等から定め、代数方程式の形としたモデル方程式を検討し、その妥当性を示した。

3.2ではまず等方性乱流場における温度変動量の散逸率に関する考察を行い、得られた関係式をもとにして成層流中の温度変動量の散逸率の表示式を提案した。この表示式中には、乱流レイノルズ数やプラントル数等がパラメータとして含まれており、乱れ場の影響が考慮されたものとなっている。

3.3では既往の乱流プラントル数の表示式に3.2の結果を用いて、乱れ場の影響を考慮した乱流プラントル数の表示式を導いた。この表示式により、既往のいくつかの乱流プラントル数と成層度との関係にみられる傾向が適切に表されることが示された。

3.4では等方性乱流場における温度のスペクトル方程式に対して3.2の結果を用いて、これを解析可能な形の方程式とした。この方程式をプラントル数の異なる流体に適用して、温度のスペクトルの分布形に関する検討を行った。



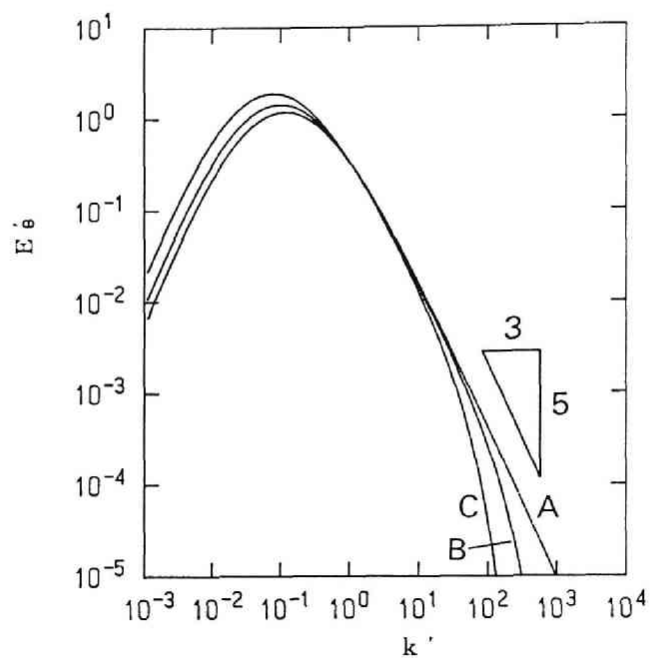


図3.4.1  $E'\epsilon$  と  $k'$  の関係

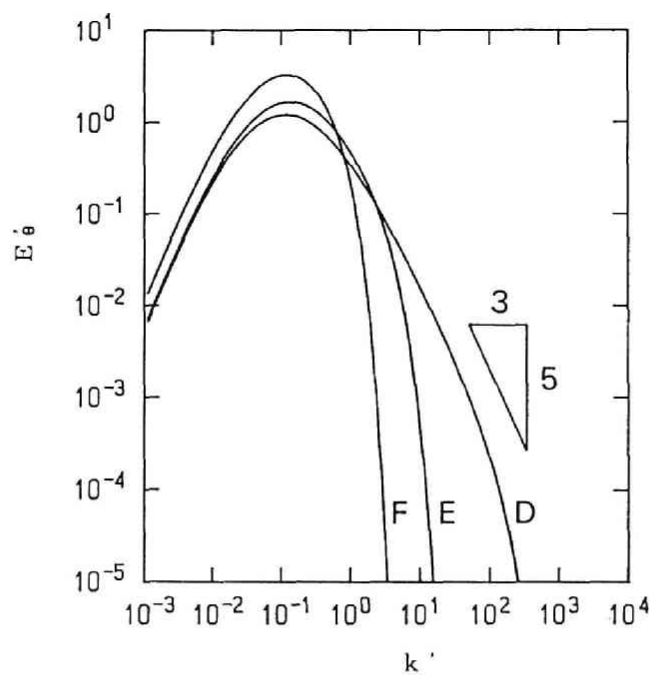


図3.4.2  $E'\epsilon$  と  $k'$  の関係

### 《第3章：参考文献》

- 1) Rotta, J.C.: 乱流 (大路通雄訳), 岩波書店, 1975.
- 2) Sreenivasan, K.R., Tavoularis, S., Henry, R. and Corrsin, S.: Temperature Fluctuation and Scales in Grid-Generated Turbulence, J. Fluid Mech., Vol. 100, 1980.
- 3) Komori, S.: Turbulence Structure in Stratified Flow, Ph.D. dissertation, Kyoto University, 1980.
- 4) Launder, B.E.: On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech., Vol. 67, 1975.
- 5) Obukhov, A.M.: Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser Geogr. i Geofiz., 13, 58, 1949.
- 6) Corrsin, S.: J. Appl. Phys. 22, 1951.
- 7) Kolmogorov, A.N.: C.R. Acad. Sci. USSR 30, 301, 1941.
- 8) 岩佐義朗・細田 尚・松井健一郎: 開水路流れにおける濃度変動場の伝播特性, 京都大学防災研究所年報 第29号B-2 別刷, 昭和61年.
- 9) Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz, Z. Phys. 124, 1948.
- 10) Hinze, J.O.: Turbulence, Second Edition, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1975.
- 11) Pao, Y.H.: Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers, Physics of Fluids, vol. 8, 1965.
- 12) Gibson, M.M. and Launder, B.E.: Ground Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layer, J. Fluid Mech., vol. 86, 1978.
- 13) 細田 尚・余越正一郎: Turbulent Reynolds数が低い領域での  $\varepsilon$ -方程式の散逸項の表示, 第30回水理講演会論文集, 1986.
- 14) Hanjalic, K. and Launder, B.E.: Contribution towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number turbulence, J. Fluid Mech., Vol. 74, 1976.
- 15) 牛島 省・守屋祥一: 2 方程式乱流モデルの成層流への適用性、電力中央研究所報告、研究報告、U87070、1988.
- 16) Komori, S.: Turbulence Structure in Stratified Flow, Ph.D. dissertation., Kyoto University, 1980.
- 17) Webster, C.A.G.: An Experimental Study of Turbulence in a Density-Stratified Shear Flow, J. Fluid Mech., vol. 19, 1964.
- 18) Iritani, Y., Nakamura, K., Ueda, S., Kiyokawa, T., Ushijima, S. and Moriya, S.: Turbulent Characteristics of Thermal Stratification in a Sodium Flow, Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, 1988.
- 19) 牛島 省: 乱れ場の特性量を考慮した乱流プラントル数の表示式, 第3回水理講演会論文集, 1989.

## 第4章 成層流の熱流動現象の数値解析モデル

成層流の温度や流速、また乱流量などの挙動といった熱流動特性を数値解析的に予測するための解析モデルとしては、乱流モデルやラージエディシミュレーション(LES)で用いるサブグリッドスケール(SGS)モデルがある。

本章では、これらの数値解析モデルに関する考察を行う。4.1では、第1章で述べたような成層流に関する工学的な問題の1つとして挙げられる、相対密度の変化の大きな成層流を対象とした乱流モデルに関する考察を行い、ブシネスク近似を用いない2方程式乱流モデルの基礎方程式を導く。相対密度差の大きな成層流としては、ここでは高速増殖炉の冷却材の温度成層化現象を具体的な対象として考える<sup>1)</sup>。また、4.2では、第3章の結果を用いて、非等温場におけるSGSモデルに関する考察を行い、サブグリッドスケールの温度変動量の散逸率に着目した数値解析モデルを提案する。

### 4.1 密度変化の大きい成層流に対する乱流モデル

#### 4.1.1 ブシネスク近似を用いない基礎方程式

流体の密度 $\rho$ は一般に圧力や温度などの関数である。ここでは、特に密度に対する温度の効果を考慮し、密度 $\rho$ は温度 $\Theta$ のみの関数であるとする。すなわち、

$$\rho = f(\Theta) \quad \text{---(4.1.1)}$$

問題を簡単にするため、特に(4.1.1)式の関係性を線形関係におきかえると、

$$(\rho - \rho_s) / \rho_s = -\beta(\Theta - \Theta_s) \quad \text{---(4.1.2)}$$

と表される。ここに $\beta$ は熱膨張係数で、温度の逆数の次元を有する係数であり、 $\rho_s$ は基準温度 $\Theta_s$ における密度である。すなわち、 $\rho$ と $\Theta$ の間に

$$\rho = \rho_s \mid_{\Theta = \Theta_s} \quad \text{---(4.1.3)}$$

なる関係が成り立つものとする。

連続式は一般に、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho U_j) = 0 \quad \text{---(4.1.4)}$$

と表される。 $U_j$ は流速の $j$ 成分である。(4.1.4)式の左辺第2項の微分を実行すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{---(4.1.5)}$$

が導かれる。密度 $\rho$ の時間的・空間的な変化が微小であると仮定すると(4.1.5)式左辺第1、2項が無視され、(4.1.5)式は

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{---(4.1.6)}$$

なる関係式に帰着する。ここでは、(4.1.5)式中のこれらの項を省略しない形で扱うもの

とする。(4.1.2)式を(4.1.5)式へ代入すれば次式が得られる。

$$\{1 - \beta(\Theta - \Theta_s)\} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} - \beta \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{---(4.1.7)}$$

次に、運動方程式は次式のように表される。

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad \text{---(4.1.8)}$$

ここに  $F_i$  は外力の  $i$  成分であり、 $p$  は圧力、 $\mu$  は粘性率である。なお、上式右辺第3項を導く際には、後述するように  $\beta / \{1 - \beta(\Theta - \Theta_s)\}$  なる値のオーダーが小さいことから、1部の項の省略を行った。(4.1.2)式を(4.1.8)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \{1 - \beta(\Theta - \Theta_s)\} \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) &= \{1 - \beta(\Theta - \Theta_s)\} F_i \\ &- \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu_s \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad \text{---(4.1.9)}$$

が得られる。ここに、 $\nu_s$  は次式で示される動粘性係数である。

$$\nu_s = \mu / \rho_s \quad \text{---(4.1.10)}$$

また、エネルギー方程式は、一般に

$$\rho c \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right) = T + \eta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} + \Phi' \quad \text{---(4.1.11)}$$

と表される。ここに  $c$  は熱容量、 $\eta$  は熱伝導率を表す。また、 $T$  は流体運動のエネルギーが粘性の効果を通じて熱エネルギーに変換される量を表す項であるが、ここでは  $T$  は他の項と比較して無視できるものとする。また、 $\Phi'$  は流体内部の発熱あるいは吸熱量を表す項である。(4.1.2)式を用いて、(4.1.11)式は次式のように表される。

$$\{1 - \beta(\Theta - \Theta_s)\} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right) = \alpha_s \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} + \Phi \quad \text{---(4.1.12)}$$

ここに、

$$\Phi = \Phi' / (\rho_s c) \quad \text{---(4.1.13)}$$

であり、 $\alpha_s$  は次式で表される熱拡散係数である。

$$\alpha_s = \eta / (\rho_s c) \quad \text{---(4.1.14)}$$

運動方程式あるいはエネルギー方程式に対するブシネスク近似とは、(4.1.9)および(4.1.12)式左辺第1項の  $\{ \}$  内の温度の効果は無視するものである<sup>2)</sup>。ブシネスク近似を用いれば、(4.1.9) および(4.1.12)式は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= \{1 - \beta(\Theta - \Theta_s)\} F_i - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &+ \nu_s \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad \text{---(4.1.15)}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} = \alpha_s \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} + \Phi \quad \text{---(4.1.16)}$$

ここではこのようなブシネスク近似を用いずに2方程式乱流モデルの基礎方程式を導出する。

#### 4.1.2 2方程式乱流モデルの基礎方程式

以上の各方程式中に現れる変数が、時間平均あるいはアンサンブル平均による平均量成分と平均量成分からの変動量成分により構成されたとする。たとえば温度 $\Theta$ 、流速 $U_i$ 、圧力 $p$ はそれぞれ

$$\Theta = \overline{\Theta} + \theta \quad \text{---(4.1.17-a)}$$

$$U_i = \overline{U_i} + u_i \quad \text{---(4.1.17-b)}$$

$$p = \overline{p} + p' \quad \text{---(4.1.17-c)}$$

と表されるものとする。ここに(4.1.17)式各式右辺第1項が平均量成分、右辺第2項が変動量成分である。

連続式(4.1.7)式に(4.1.17)式を代入して平均操作を行うと、次式が得られる。

$$\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_j} - \frac{\beta}{\gamma} \left( \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta} \right) = 0 \quad \text{---(4.1.18)}$$

ここに

$$\gamma = \{1 - \beta(\overline{\Theta} - \Theta_s)\} \quad \text{---(4.1.19)}$$

である。

同様に運動方程式(4.1.9)式に(4.1.17)式を代入して平均操作を行うと、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = & F_i - \frac{1}{\gamma \rho_s} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \\ & + \frac{\beta}{\gamma} Q_i \end{aligned} \quad \text{---(4.1.20)}$$

ここに、

$$Q_i = \overline{\theta \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{U_j \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_j \theta \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}} + \overline{u_j \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad \text{---(4.1.21)}$$

である。

エネルギー方程式に対しても同様の演算を行うと次式が得られる。

$$\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_j} = \frac{\alpha_s}{\gamma} \frac{\partial^2 \overline{\Theta}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\Phi}{\gamma} - \overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} + \frac{\beta}{\gamma} R \quad \text{---(4.1.22)}$$

ここに

$$R = \overline{\theta \frac{\partial \theta}{\partial t}} + \overline{U_j \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} + \overline{u_j \theta \frac{\partial \Theta}{\partial x_j}} + \overline{u_j \theta \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \quad \text{--- (4.1.23)}$$

である。

さて、高速増殖炉の炉内の冷却材である液体ナトリウムの流れを考える場合、原子炉トリップ時には流体中の密度の変化が非常に大きくなるが、

$$\overline{\Theta} - \Theta_s \cong 500(^{\circ}\text{C}) \quad \text{--- (4.1.24)}$$

とした場合でも、

$$\beta / \gamma \cong 0 (10^{-4}) \quad \text{--- (4.1.25)}$$

とオーダーがかなり低いため、(4.1.20)式右辺第4項と第5項を比較して、

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \gg \frac{\beta}{\gamma} Q_i \quad \text{--- (4.1.26)}$$

また、(4.1.22)式右辺第3項と第4項を比較して、

$$\overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \gg \frac{\beta}{\gamma} R \quad \text{--- (4.1.27)}$$

と考えれば、(4.1.20)式と(4.1.22)式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} &= F_i - \frac{1}{\gamma \rho_s} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} \\ &\quad - \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad \text{--- (4.1.28)}$$

$$\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \overline{U_j \frac{\partial \Theta}{\partial x_j}} = \frac{\alpha_s}{\gamma} \frac{\partial^2 \overline{\Theta}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\Phi}{\gamma} - \overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \quad \text{--- (4.1.29)}$$

次に、流速の変動量成分に対する連続式を導く。連続式(4.1.7)式に(4.1.17)式を代入し、これより(4.1.18)式を引くと、次の方程式が導かれる。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\beta}{\gamma - \beta \theta} S' \quad \text{--- (4.1.30)}$$

ここに、

$$\begin{aligned} S' &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{U_j \theta}) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\Theta} + \theta) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta} \end{aligned} \quad \text{--- (4.1.31)}$$

である。

$$\gamma \gg \beta \theta \quad \text{--- (4.1.32)}$$

とすれば、(4.1.30)式は

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \cong \frac{\beta}{\gamma} S' \quad \text{--- (4.1.33)}$$

となる。(4.1.33)式を用いると、

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j - \frac{\beta}{\gamma} u_i S' \end{aligned} \quad \text{--- (4.1.34)}$$

(4.1.25)式を考慮して、

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j \gg \frac{\beta}{\gamma} u_i S' \quad \text{--- (4.1.35)}$$

とすれば、(4.1.34)式は、

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cong \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j \quad \text{--- (4.1.36)}$$

となる。また、同様に以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \theta - \theta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \theta - \frac{\beta}{\gamma} \theta S' \\ &\cong \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \theta \end{aligned} \quad \text{--- (4.1.37)}$$

(4.1.36)、(4.1.37)式に平均操作を行えば、次式が得られる。

$$\overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \cong \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} \quad \text{--- (4.1.38)}$$

$$\overline{u_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j}} \cong \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta} \quad \text{--- (4.1.39)}$$

(4.1.38)、(4.1.39)式を用いると、運動方程式(4.1.28)式とエネルギー方程式(4.1.29)式は次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} &= F_i - \frac{1}{\gamma \rho_s} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\gamma_s}{\gamma} \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_j} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} \end{aligned} \quad \text{--- (4.1.40)}$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} = \frac{\alpha_s}{\gamma} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\Phi}{\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta} \quad \text{---(4.1.41)}$$

次に、乱れの運動エネルギー  $k$  に関する方程式を導く。まず流速変動量に対する運動方程式を導くために、(4.1.17)式を(4.1.9)式に代入し、これより(4.1.20)式を引くことにより、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \\ = \frac{\beta}{\gamma} (Q'_i - Q_i) - \frac{\beta}{\gamma} \theta F_i - \frac{1}{\gamma \rho_s} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \\ + \frac{\gamma_s}{\gamma} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad \text{---(4.1.42)}$$

ここに

$$Q'_i = \theta \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U}_i + u_i) + \theta (\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{U}_i + u_i) \quad \text{---(4.1.43)}$$

である。(4.1.42)式に  $u_i$  を乗じた後、平均操作を行うと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i Q'_i} - \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i \theta F_i} \\ - \frac{1}{\gamma \rho_s} \overline{u_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \frac{\gamma_s}{\gamma} \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{\gamma} \varepsilon \end{aligned} \quad \text{---(4.1.44)}$$

ここで、 $\varepsilon$  は乱れの運動エネルギーの散逸率を表す。 $k$  および  $\varepsilon$  はそれぞれ次式で定義される。

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad \text{---(4.1.45)}$$

$$\varepsilon = \gamma_s \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad \text{---(4.1.46)}$$

(4.1.44)式の導出に際しては、

$$\begin{aligned} \gamma_s \overline{u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}} = \gamma_s \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) \\ - \gamma_s \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad \text{---(4.1.47)}$$

なる関係を用いており、上式右辺第2項がエネルギー散逸率  $\varepsilon$  に相当するものとなっている。(4.1.44)式左辺第4項は、(4.1.38)式を用いると次のように表される。

$$\overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j k} \quad \text{---(4.1.48)}$$



ここに、

$$k' = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad \text{---(4.1.49)}$$

である。また、(4.1.44)式右辺第3項も同様に(4.1.38)式を用いると

$$-\frac{1}{\gamma \rho_s} \overline{u_i \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\gamma \rho_s} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i p'} \quad \text{---(4.1.50)}$$

と表される。(4.1.48)、(4.1.50)式を用いると(4.1.44)式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i Q_i'} - \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i \theta F_i} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\gamma \rho_s} \overline{u_j p'} + \overline{u_j k'} - \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \\ &- \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{1}{\gamma} \varepsilon \end{aligned} \quad \text{---(4.1.51)}$$

ただし、 $\gamma$ に対しては、

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \cong 0 \quad \text{---(4.1.52)}$$

が成り立つものとした。従来の $k-\varepsilon$ モデルの $k$ に対する輸送方程式のモデル化<sup>3)</sup>と同様に、(4.1.51)式右辺第3項のカッコ内の1部の項に対して次のようなモデル化を行う。

$$\frac{1}{\gamma \rho_s} \overline{u_j p'} + \overline{u_j k'} = -C_K \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad \text{---(4.1.53)}$$

ここに $C_K$ は定数であるが、(4.1.53)式右辺に対して $\gamma$ の効果を考慮すれば、

$$C_K = C_K(\gamma) \quad \text{---(4.1.54)}$$

とすることも考えられる。また、(4.1.51)式右辺第1項は、

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i Q_i'} &= \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i \theta} \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right) \\ &+ \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i \theta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad \text{---(4.1.55)}$$

と表される。 $k$ に関する方程式を2次のオーダーでクローズするためには(4.1.55)式右辺第2項のモデル化を行う必要がある。同項のモデル化の一例として次のような形も考えられる。

$$\overline{u_i \theta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= -C_a \overline{u_i \theta} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} \quad \text{---(4.1.56)}$$

ここに  $C_a$  はある定数とする。以上のモデル化を行った  $k$  に関する方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = & \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i Q'_i} - \frac{\beta}{\gamma} \overline{u_i \theta F_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ C_k(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right. \\ & \left. + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{1}{\gamma} \varepsilon \end{aligned} \quad \text{---(4.1.57)}$$

ここに、

$$\overline{u_i Q'_i} = \overline{u_i \theta} \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - C_a \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} \right) \quad \text{---(4.1.58)}$$

である。なお、(4.1.57)式右辺第1項は、(4.1.25)式を考慮すれば、式中の他の項と比較して無視することもできると考えられる。

次にエネルギー散逸率  $\varepsilon$  に関する方程式を導く。流速の変動量成分  $u_i$  に関する方程式 (4.1.42)式に (4.1.36)、(4.1.38)、(4.1.52)式を用い、方程式全体を  $x_k$  で微分することにより次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{U_j} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \\ + u_j \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \overline{u_i u_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \overline{u_i u_j} \\ = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial Q'_i}{\partial x_k} - \frac{\beta}{\gamma} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} F_i - \frac{1}{\gamma \rho_s} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_k} \\ + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k} \end{aligned} \quad \text{---(4.1.59)}$$

上式中で、右辺第1項を無視し、Tennekesら<sup>4)</sup>と同様に各項に  $2\nu_s(\partial u_i / \partial x_k)$  を乗じて平均操作を行うと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\varepsilon' u_j - \frac{2\nu_s}{\gamma \rho_s} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right. \\ \left. + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2\nu_s u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_k} \\ - 2\nu_s \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - 2\nu_s \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{\gamma} \overline{\left( \nu_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} - \frac{2 \nu_s \beta}{\gamma} F_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \quad \text{--- (4.1.60)}$$

ここに、

$$\varepsilon' = \nu_s \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{--- (4.1.61)}$$

である。次に、(4.1.60)式を2次のオーダーでクローズするために、そのモデル化を行う。  
(4.1.60)式右辺第1項のカッコ内の1部の項に対して、次のようなモデル化を行う<sup>5)</sup>。

$$-\overline{\varepsilon' u_j} - \frac{2 \nu_s}{\gamma \rho_s} \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k}} = C_\varepsilon(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \quad \text{--- (4.1.62)}$$

ここに $C_\varepsilon(\gamma)$ は定数あるいは $\gamma$ のある関数とする。また、(4.1.60)式右辺第2項は第4項と比較して無視できるものと考え、さらに小スケールの乱れが等方的であると仮定して右辺第3、6項を無視する。さらに、(4.1.60)式右辺第4、5項に関して、次のようなモデル化を行う<sup>5)</sup>。

$$\begin{aligned} & -2 \nu_s \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{\gamma} \overline{\left( \nu_s \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2} \\ & = -C_{\varepsilon 1}(\gamma) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}(\gamma) \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad \text{--- (4.1.63)}$$

ここに、 $C_{\varepsilon 1}(\gamma)$ 、 $C_{\varepsilon 2}(\gamma)$ は定数あるいは $\gamma$ の関数とする。以上のモデル化により、 $\varepsilon$ に関する次の方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ C_\varepsilon(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\nu_s}{\gamma} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} \\ & - C_{\varepsilon 1}(\gamma) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2}(\gamma) \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad \text{--- (4.1.64)}$$

これまでに導いた各方程式中に含まれるレイノルズ応力 $-\overline{u_i u_j}$ あるいは乱流熱フラックス $-\overline{u_i \theta}$ に対して次のブシネスクの仮説

$$-\overline{u_i u_j} = \varepsilon_M \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad \text{--- (4.1.65)}$$

$$-\overline{u_i \theta} = \varepsilon_H \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} \quad \text{--- (4.1.66)}$$

を用い、乱流拡散係数 $\varepsilon_M$ および $\varepsilon_H$ が $k$ と $\varepsilon$ とから表現されたとすれば、以上の方程式系はクローズするものとなり、ブシネスク近似を用いない2方程式乱流モデルの基礎方程式系となる。なお(4.1.65)式中の $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである。

#### 4. 1. 3 一般曲線座標系における基礎方程式

後述するように、本研究ではこれまでに導いた基礎方程式を用いて円筒座標系における数値解析を行うため、ブシネスク近似を用いない基礎方程式系をまず一般曲線座標系における方程式とする。

前章で導いた連続式(4.1.18)式、運動方程式(4.1.40)式、エネルギー方程式(4.1.41)式、そして乱れエネルギー $k$ とその散逸 $\varepsilon$ に関する方程式(4.1.57)、(4.1.64)式は、一般曲線座標系においては次のように示される<sup>6)</sup>。

$$\nabla_j \bar{V}^j - \frac{\beta}{\gamma} \left( \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{V}^j \nabla_j \bar{\Theta} + \nabla_j \bar{V}^j \bar{\Theta} \right) = 0 \quad \text{---(4.1.67)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}^i}{\partial t} + \bar{V}^j \nabla_j \bar{V}^i &= F^i - \frac{1}{\gamma \rho_s} g^{ij} \nabla_j \bar{p} + \frac{v_s}{\gamma} g^{ij} \nabla_j \nabla_j \bar{V}^i \\ &\quad - \nabla_j \bar{v}^i \bar{v}^j \end{aligned} \quad \text{---(4.1.68)}$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{V}^j \nabla_j \bar{\Theta} = \frac{\alpha_s}{\gamma} g^{ij} \nabla_j \nabla_j \bar{\Theta} + \frac{\Phi}{\gamma} - \nabla_j \bar{v}^j \bar{\Theta} \quad \text{---(4.1.69)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{V}^j \nabla_j k &= \frac{\beta}{\gamma} \bar{v}^i \bar{Q}_i' - \frac{\beta}{\gamma} \bar{v}_i \bar{\Theta} F^i \\ &\quad + \nabla_j \left\{ C_k(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} g^{ij} \nabla_j k + \frac{v_s}{\gamma} g^{ij} \nabla_j k \right\} \\ &\quad - \bar{v}_i \bar{v}^j \nabla_j \bar{V}^i - \frac{1}{\gamma} \varepsilon \end{aligned} \quad \text{---(4.1.70)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{V}^j \nabla_j \varepsilon &= \nabla_j \left\{ C_\varepsilon(\gamma) \frac{k^2}{\varepsilon} g^{ij} \nabla_j \varepsilon + \frac{v_s}{\gamma} g^{ij} \nabla_j \varepsilon \right\} \\ &\quad - C_{\varepsilon_1}(\gamma) \frac{\varepsilon}{k} \bar{v}_i \bar{v}^j \nabla_j \bar{V}^i - C_{\varepsilon_2}(\gamma) \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad \text{---(4.1.71)}$$

ここに、(4.1.70)式中で、

$$\bar{v}^i \bar{Q}_i' = \bar{v}_i \bar{\Theta} \left( \frac{\partial \bar{V}^i}{\partial t} + \bar{V}^j \nabla_j \bar{V}^i - C_a \nabla_j \bar{v}^i \bar{v}^j \right) \quad \text{---(4.1.72)}$$

である。これらの方程式中で、 $\bar{V}^i$ および $\bar{v}^i$ は流速の反変ベクトルの $i$ 成分の平均量成分と変動量成分を表し、 $\bar{v}_i$ は流速の共変ベクトルの $i$ 成分の変動量成分を表す。また、 $F^i$ は外力の反変ベクトルの $i$ 成分である。 $\nabla_j$ は共変微分を表し、 $g^{ij}$ は基本テンソルの反変成分である。また、特に連続式(4.1.67)式に対して(4.1.69)式を用いれば、

$$\nabla_j \bar{V}^j - \frac{\beta}{\gamma} \left( \frac{\alpha_s}{\gamma} g^{ij} \nabla_j \nabla_j \bar{\Theta} + \frac{\Phi}{\gamma} \right) = 0 \quad \text{---(4.1.73)}$$

なる形で連続式が表現される。また、ブシネスクの仮説を用いた(4.1.65)および(4.1.66)

式は、一般曲線座標系では次のように表現される。

$$-\overline{\nabla^i v^j} = \varepsilon_M (g^{ii} \nabla_i \overline{V^j} + g^{jj} \nabla_j \overline{V^i}) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} g^{jj} \quad \text{--- (4.1.74)}$$

$$-\overline{\nabla^i \theta} = \varepsilon_H g^{ii} \nabla_i \overline{\Theta} \quad \text{--- (4.1.75)}$$

これらの一般曲線座標における基礎方程式を、たとえば図4.1.1に示される円筒座標系におけるものとするためには、まず方程式中のテンソル量や反変ベクトル等の共変微分を微分公式等を用いて簡単な形とし、そして円筒座標系における基本テンソルの反変成分やクリストフェルの記号などの値を代入すればよい<sup>7)</sup>。

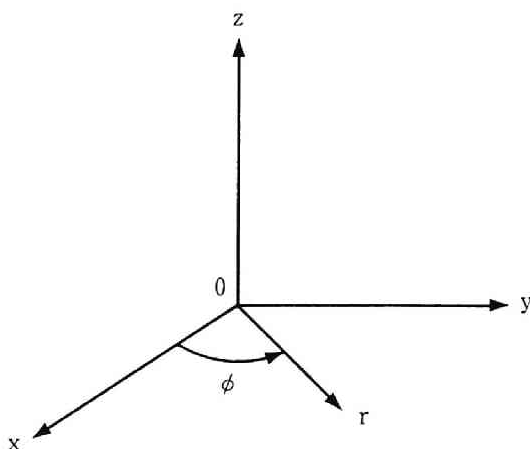


図4.1.1 円筒座標系

#### 4.2 非等温場におけるサブグリッドスケールモデル

Navier-Stokes方程式を直接数値的に解析して乱流現象を予測することは、Hirt<sup>8)</sup>が指摘したような困難が伴うため、エネルギーを含んだ比較的スケールの大きい乱流運動を対象とした数値解析を行うラージエディシミュレーション(LES)が近年行われるようになった<sup>9)</sup>。LESでは、通常解析メッシュより小さいスケールの乱流運動に対するモデル化を行うが、このようなモデルはサブグリッドスケール(SGS)モデルと呼ばれる。ここでは、Deardorff<sup>10)</sup>が提案したSGSモデルをもとにして、特にそのサブグリッドスケールの温度変動量の散逸率に着目したモデルを導く。

Navier-Stokes方程式およびエネルギー方程式に施されるフィルターは一般に次のよう

な演算として表される。

$$\overline{f(x)} = \int G(x-x') f(x') dx' \quad \text{---(4.2.1)}$$

ここに、 $f$ はある変数を表す。フィルター関数 $G$ としては、Leonard<sup>11)</sup>が示すように、いくつかのものがある。フィルタリングに関して、次の関係が成り立つ。

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}, \quad \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}} = \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial x_i^2} \quad \text{---(4.2.2)}$$

これらの関係式を用いると、連続式は次のように表される。

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = 0 \quad \text{---(4.2.3)}$$

また、Navier-Stokes方程式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) &= \{1 - \beta(\overline{\theta} - \theta_0)\} F_i \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} & \end{aligned} \quad \text{---(4.2.4)}$$

ここで、流速 $u_i$ を解析可能なスケールの成分 $\overline{u_i}$ とサブグリッドスケールの成分 $u'_i$ との和として表す。すなわち、

$$u_i = \overline{u_i} + u'_i \quad \text{---(4.2.5)}$$

すると、(4.2.4)式中の $\overline{u_i u_j}$ なる部分は、次のように表される。

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} + \overline{u'_i \overline{u_j}} + \overline{\overline{u_i} u'_j} + \overline{u'_i u'_j} \quad \text{---(4.2.6)}$$

(4.2.6)式右辺第一項に対して、Lilly<sup>12)</sup>は次の仮定を行った。

$$\overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} = \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \quad \text{---(4.2.7)}$$

一方、Leonard<sup>11)</sup>は、

$$L_{ij} = \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{\overline{u_i}} \overline{\overline{u_j}} \quad \text{---(4.2.8)}$$

なる $L_{ij}$ が、エネルギーのカスケード過程で重要な役割をするとしている。(4.2.4)、(4.2.6)、(4.2.8)式より、

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) &= \{1 - \beta(\overline{\theta} - \theta_0)\} F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \\ + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} & \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j} + \overline{u_i' u_j} + \overline{u_i' u_j'}) \quad \text{---(4.2.9)}$$

が得られる。同様に、エネルギー式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_j \theta}) &= \alpha \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_j \theta'} + \overline{u_j' \theta} + \overline{u_j' \theta'}) \end{aligned} \quad \text{---(4.2.10)}$$

ここに、

$$T_{ij} = \overline{u_j \theta} - \overline{u_j' \theta} \quad \text{---(4.2.11)}$$

である。これらの方程式系を解析可能なものとするために、(4.2.9)式右辺第4、5項および(4.2.10)式右辺第2、3項のモデル化が必要となる。このためには、解析可能な成分どうしの相互作用や解析可能な成分とサブグリッドスケールの成分との関係、さらにサブグリッドスケールの成分間での相互作用についての考察が必要となる。しかしながら、ここではごく簡単に Deardorff<sup>10)</sup>にならい、これらの項がサブグリッドスケールのレイノルズ応力や乱流熱フラックスにより表示されるものとする。すなわち、

$$\overline{u_i' u_j'} = L_{ij} + \overline{u_i u_j} + \overline{u_i' u_j} + \overline{u_i u_j'} \quad \text{---(4.2.12)}$$

$$\overline{u_j \theta'} = T_{ij} + \overline{u_j \theta'} + \overline{u_j' \theta} + \overline{u_j' \theta'} \quad \text{---(4.2.13)}$$

上式から、解析可能な成分に対する運動方程式およびエネルギー方程式は、それぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j}) &= \{1 - \beta(\overline{\theta} - \theta_0)\} F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ &+ \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'} \end{aligned} \quad \text{---(4.2.14)}$$

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_j \theta}) = \alpha \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_j' \theta'}) \quad \text{---(4.2.15)}$$

Smagorinsky<sup>13)</sup>やLilly<sup>14)</sup>は、サブグリッドスケールのレイノルズ応力を、1次のオーダーでクローズする理論を用いて表現した。一方、Deardorff<sup>10)</sup>は、非等温の流れ場に対して、Dalyら<sup>15)</sup>が提案した輸送方程式に基づいて、サブグリッドスケールのレイノルズ応力、乱流熱フラックスそして温度変動量のモデル化された輸送方程式を導いた。Deardorffによりモデル化された輸送方程式はそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i u_j}) = \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} \{ C_{3m} \Delta E^{1/2} (\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j u_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j}) \} \\
& - C_m \frac{E^{1/2}}{\Delta} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} E) + \frac{2}{5} E (\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}) \\
& - \beta (F_i \overline{u_j \theta'} + F_j \overline{u_i \theta'}) - 2 \delta_{ij} C_E \frac{E^{3/2}}{\Delta} \quad \text{---(4.2.16)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i \theta'} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j u_i \theta'}) = - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ C_{3s} \Delta E^{1/2} (\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j \theta'} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i \theta'}) \} \\
& - C_s \frac{E^{1/2}}{\Delta} \overline{u_i \theta'} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \beta F_j \overline{\theta'^2} \quad \text{---(4.2.17)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \overline{\theta'^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j \theta'^2}) = - 2 \overline{u_j \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{3\theta} \Delta E^{1/2} \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\theta'^2}) \\
& - C_\theta \frac{E^{1/2}}{\Delta} \overline{\theta'^2} \quad \text{---(4.2.18)}
\end{aligned}$$

ここに、

$$\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3} \quad \text{---(4.2.19)}$$

である。なお、これらの輸送方程式中では、分子拡散項は省略されている。また、(4.2.16)式よりサブグリッドスケールの乱れエネルギーE

$$E = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad \text{---(4.2.20)}$$

に関する方程式が次のような形で得られる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j E}) = - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ C_{3m} \Delta E^{1/2} (\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i u_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_j u_j}) \} \\
& - \beta F_i \overline{u_i \theta'} - 3 C_E \frac{E^{3/2}}{\Delta} \quad \text{---(4.2.21)}
\end{aligned}$$

浮力効果が弱い流れ場では、(4.2.16)式および(4.2.17)式中のオーダーの高い項のみを用いて、サブグリッドスケールのレイノルズ応力と乱流熱フラックスは次のような勾配拡散型の関係式で表示される<sup>16)</sup>。



$$\overline{u_i' u_j'} = -K_m \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} E \quad \text{--- (4.2.22)}$$

$$\overline{u_i' \theta'} = -K_s \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} \quad \text{--- (4.2.23)}$$

ここに、

$$K_m = \frac{4}{15} \frac{\Delta}{C_m} E^{1/2} \quad \text{--- (4.2.24)}$$

$$K_s = \frac{2}{3} \frac{\Delta}{C_s} E^{1/2} \quad \text{--- (4.2.25)}$$

である。

一方、(4.2.17)式および(4.2.18)式に対して、方程式中の移流項と拡散項を無視すると、次のような代数方程式が得られる。

$$\begin{aligned} 0 = & -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - C_s \frac{E^{1/2}}{\Delta} \overline{u_i' \theta'} \\ & - \frac{2}{3} \delta_{ij} \beta F_j \overline{\theta'^2} \end{aligned} \quad \text{--- (4.2.26)}$$

$$0 = -2 \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - C_\theta \frac{E^{1/2}}{\Delta} \overline{\theta'^2} \quad \text{--- (4.2.27)}$$

上式より、乱流熱フラックスの鉛直方向成分  $-\overline{u_3' \theta'}$  と温度変動量  $\overline{\theta'^2}$  に対して次式が得られる。

$$-\overline{u_3' \theta'} = -\frac{\Delta}{C_s E^{1/2}} \left( -\overline{u_3'^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} + \frac{2}{3} \beta g \overline{\theta'^2} \right) \quad \text{--- (4.2.28)}$$

$$\overline{\theta'^2} = -\frac{2\Delta}{C_\theta E^{1/2}} \overline{u_3' \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \quad \text{--- (4.2.29)}$$

温度変動量の散逸は、小スケールの乱流運動により行われるため、3.2で考察を行った温度変動量の散逸率  $\varepsilon_\theta$  の表示式に含まれる係数  $c_\tau$  が(4.2.29)式中の  $C_\theta$  と次のような関係があると考える。

$$C_\theta = \frac{1}{2} c_\tau \quad \text{--- (4.2.30)}$$

上式より、3.2の結果を用いて  $C_\theta$  は次のような関係式で表される。

$$\frac{1}{C_\theta} = \frac{b_1}{a_1 + a_2 Pr C_L R_T \lambda_0^2} + b_2 \left( \frac{\lambda C_L R_T}{a_1 + a_2 C_L R_T} \right)^{2/3} \quad \text{--- (4.2.31)}$$

ここに

$$\lambda^* = 16 Pr \frac{a_1 + a_2 C_L R_T}{a_1 + 16 a_2 Pr C_L R_T \lambda_0^2} \quad \text{---(4.2.32)}$$

ここで乱流レイノルズ数  $R_T$  に対しては、サブグリッドスケールの乱流量を用いた次のような表現が考えられる。

$$R_T = \frac{E^2}{3 C_E \frac{E^{3/2}}{\Delta} \nu} = \frac{\Delta E^{1/2}}{3 C_E \nu} \quad \text{---(4.2.33)}$$

#### 4.3 まとめ

本章では、成層流の熱流動現象を数値解析的に予測するための解析モデルに関する考察を行った。4.1では、相対密度差の大きな成層流を対象とした乱流モデルに関する考察を行い、ブシネスク近似を用いない2方程式乱流モデルの基礎方程式を導いた。相対密度差の大きな成層流としては、高速増殖炉の冷却材の成層化現象等があり、ここで導かれたモデルはそのような熱流動現象へ適用可能であると考えられる。また、4.2では、第3章の結果を用いて、非等温場におけるSGSモデルに関する考察を行い、サブグリッドスケールスケールの温度変動量の散逸率に着目した数値解析モデルを提案した。

#### 《第4章：参考文献》

- 1) Ushijima, S.: Turbulence Model for Thermal Stratification Phenomena with Large Density Effects, Proc. 26th AIChE National Heat Transfer Conf., 1989.
- 2) Turner, J.S.: Buoyancy Effects In Fluids, Cambridge at the University Press, 1973.
- 3) Launder, B.E. and Spalding, D.B.: The Numerical Computation of Turbulent Flows, Comput. Methods in Applied Mech. and Eng. 3, 1974.
- 4) Tennekes, H and Lumley, J.L.: A First Course in Turbulence, M.I.T. Press, 1972.
- 5) Hanjalić, K.: Two-Dimensional Asymmetric Turbulent Flow in Ducts, Ph.D. Thesis, University of London, 1970.
- 6) Hosoda, T., Iwasa, Y and Yokoshi, S.: Hydraulic Analysis of Turbulent Jets by means of  $k-\varepsilon$  Models, Kyoto University School of Civil Engineering, Research Rep. No. 84-HY-01, 1984.
- 7) 牛島 省・守屋 祥一: 乱流モデルの非等温二重管噴流への適用性, 電力中央研究所報告, 究報告: U88001, 1988.
- 8) Hirt, C.W., Phys. Fluids, Suppl. II, 1969.
- 9) Herring, J.R.: Subgrid Scale Modeling - An Introduction and Overview, Turbulent Shear Flows I, Part V, Springer Series in Comput. Physics, 1977.
- 10) Deardorff, J.W.: The Use of Subgrid Transport Equation in a Three-Dimensional Model of Atmospheric Turbulence, J. Fluid Eng., 1973.
- 11) Leonard, A.: Energy Cascade in Large-Eddy Simulation of Turbulent Fluid Flows, Adv. Geophys., 18A, 1974.
- 12) Lilly, D.K.: The Representation of Small-Scale Turbulence in Numerical Simulation Experiments, Proc. IBM Sci. Comput. Symp. Environ. Sci., IBM Data Process. Div., White Plains, N.Y., 1967.
- 13) Smagorinsky, J.: General Circulation Experiments with Primitive Equations. I. The Basic Experiment, Mon. Weather Rev. 91, 3, 1963.
- 14) Lilly, D.K.: On the Numerical Simulation of Buoyant Convection, Tellus 14, 1962.
- 15) Daly, B.J. and Harlow, F.H.: Transport Equation in Turbulence, Phys. Fluids, Vol. 13, No. 11, 1970.
- 16) Deardorff, J.W.: Numerical Investigation of Neutral and Unstable Planetary Boundary Layers, J. Atmospheric Sci., Vol. 29, 1972.

## 第5章 解析モデルの適用性

本章では、これまでの第2、3、4章で得られた、成層度の影響を考慮した乱流モデルの係数や成層流の乱流特性量に対する表示式、また数値解析モデル等の適用性に関する考察を行う。

5.1では、数値解析モデル等を適用するための解析方法に関する検討を行う。5.2では、第2章の実験結果を用いた2方程式乱流モデルを成層流に適用する。また、第4章で得られたサブグリッドスケールモデルを用いて成層流のラージエディシミュレーションを行う。5.3では、成層流の断熱側壁面近傍の領域を対象とする数値解析を行う。解析モデルとしては、壁面近傍に適用可能な低レイノルズ数の場における既往の乱流モデルと第3章で得られた乱れ場の影響を考慮した温度変動量の散逸率の表示式を組み合わせる。5.4では、第2章の結果を用いた2方程式乱流モデルにより、軸対称の円筒容器内に生ずる成層化現象の数値解析を行う。また、第4章で導いたブシネスク近似を用いない2方程式乱流モデルを、実際の高速増殖炉に近いスケールの円筒容器内における液体金属ナトリウムの温度成層化現象に適用する。

### 5.1 数値解析手法

#### 5.1.1 非線形項の解析方法

差分法に基づく数値解析を行う際に、運動方程式やエネルギー方程式中の移流項から生ずる数値誤差は、運動量や温度に対する見かけ上の拡散効果として作用し、解析精度を低減させる<sup>1)</sup>。本研究では、これらの非線形項の解法として特性曲線法に基づく解析手法を用いた。この解析手法は、Taylor展開の3次の項までを用いて空間上のある位置 $\tilde{x}$  ( $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ )に存在する変数 $\phi_{ijk}$ の値を内挿近似するものである。2次元平面内および3次元空間内における内挿近似式は、それぞれ次のように表される。

$$\tilde{\phi}_{ij} = \sum_{i,j}^{16} \left( \prod_{\ell=1}^4 \frac{x_{\ell} - \tilde{x}}{x_{\ell} - x_i} \right) \left( \prod_{m=1}^4 \frac{y_m - \tilde{y}}{y_m - y_j} \right) \phi_{ij} \quad \text{---(5.1.1)}$$

$$\tilde{\phi}_{ijk} = \sum_{i,j,k}^{64} \left( \prod_{\ell=1}^4 \frac{x_{\ell} - \tilde{x}}{x_{\ell} - x_i} \right) \left( \prod_{m=1}^4 \frac{y_m - \tilde{y}}{y_m - y_j} \right) \left( \prod_{n=1}^4 \frac{z_n - \tilde{z}}{z_n - z_k} \right) \phi_{ijk} \quad \text{---(5.1.2)}$$

なお、上式中では、

$$\ell \neq i, m \neq j, n \neq k \quad \text{---(5.1.3)}$$

なる条件が付加される。(5.1.1)および(5.1.2)式中で、上付き $\sim$ 印のない変数は、全て計算点上の変数および座標を表す。図5.1.1に(5.1.1)式で示される2次元場での内挿近似の状態を示した。また、図5.1.2には3次元場における内挿近似で用いる計算点の分布の状況を示した。これらの図に示されるように、2次元場では点 $\tilde{x}$ の周囲の16個の計算点上の変数、また3次元場では64個の変数を用いて内挿近似が行われることになる。

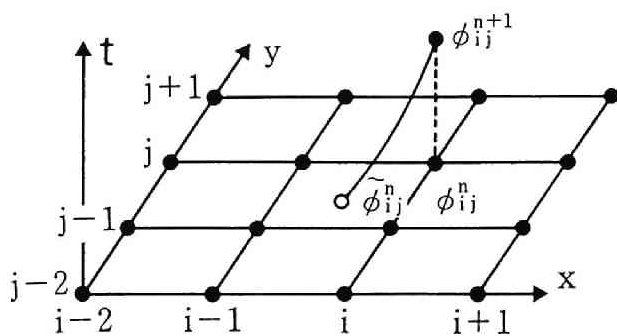


図5.1.1 2次元場における内挿近似

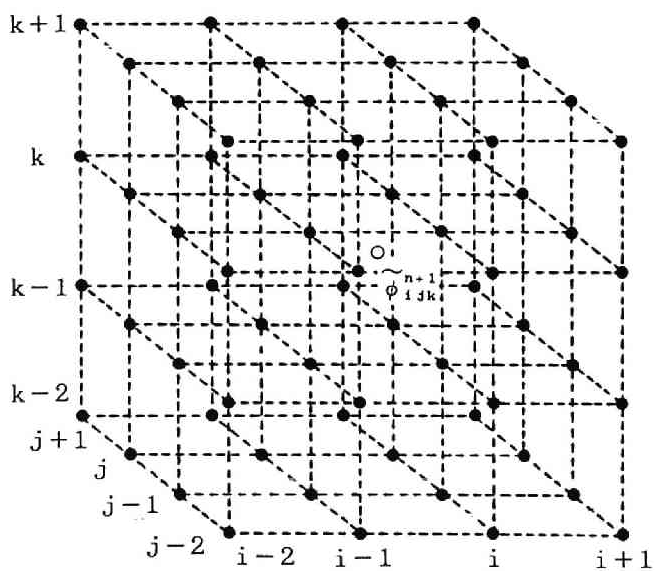


図5.1.2 3次元場における計算点の分布

本研究で用いる解析手法とTaylor展開の1次の項のみを用いて内挿近似を行う方法との精度の相違を把握するため、単純な条件下におけるスカラー量の移流方程式の数値解析を行った。すなわち、図5.1.3に示すような平面2次元内で、対角線AA'に平行な様な流速が存在する場合に、辺AB'と辺ABにそれぞれ1.0および0.0という値のスカラー量が与えられたという条件で、スカラー量の移流方程式の解析を行った。このような条件下ではスカラー量の拡散がないため、理論上は対角線AA'を境界として1.0と0.0というスカラー量が移流されてゆくことになるが、非線形項から発生する解析上の誤差のため、解析結果には見かけ上の拡散が生じた形となる。対角線BB'上のスカラー量の分布を図5.1.4に示した。本研究で用いる解析手法による解析結果にも誤差がわずかに含まれているが、解析精度はTaylor展開の1次の項のみを用いる手法よりも高いものとなっている。

### 5.1.2 圧力のポアソン方程式の解析方法

ブシネスク近似を用いない場合の連続方程式は、4.1での考察の結果、次のように表される。

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = \frac{\alpha_s \beta}{\gamma^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial z^2} \right) + \frac{\beta}{\gamma} \bar{\Theta} \equiv D \quad \text{---(5.1.4)}$$

図5.1.5に示されるように計算メッシュの中央の点で上式を差分化する。離散化した上式右辺の値を $D_{ijk}$ とすれば、 $n+1$ ステップの時刻における差分式は次のように表される。

$$\frac{\bar{U}_{ijk}^{n+1} - \bar{U}_{ijk}^n}{\Delta x} + \frac{\bar{V}_{ijk}^{n+1} - \bar{V}_{ijk}^n}{\Delta y} + \frac{\bar{W}_{ijk}^{n+1} - \bar{W}_{ijk}^n}{\Delta z} = D_{ijk} \quad \text{---(5.1.5)}$$

一方、運動方程式の差分式もそれぞれの定義点において次のように離散化することができる。

$$\bar{U}_{ijk}^{n+1} = F U_{ijk}^n - \frac{\Delta t}{\gamma \rho_s \Delta x} (\bar{p}_{ijk}^{n+1} - \bar{p}_{i,j,k}^n) \quad \text{---(5.1.6)}$$

$$\bar{V}_{ijk}^{n+1} = F V_{ijk}^n - \frac{\Delta t}{\gamma \rho_s \Delta y} (\bar{p}_{ijk}^{n+1} - \bar{p}_{i,j-1,k}^n) \quad \text{---(5.1.7)}$$

$$\bar{W}_{ijk}^{n+1} = F W_{ijk}^n - \frac{\Delta t}{\gamma \rho_s \Delta z} (\bar{p}_{ijk}^{n+1} - \bar{p}_{i,j,k-1}^n) \quad \text{---(5.1.8)}$$

ここで、 $F U_{ijk}^n$ 、 $F V_{ijk}^n$ および $F W_{ijk}^n$ は各運動方程式における時間項の一部と圧力項とを除いた部分の離散式である。ここでは運動方程式は時間的にSemi-Implicit法<sup>2)</sup>を用いて差分化しているため、圧力には $n+1$ ステップにおける値を用いている。(5.1.6)、(5.1.7)、(5.1.8)式を(5.1.5)式に代入することにより、次式が導かれる。

$$2 \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \bar{p}_{ijk}^{n+1}$$

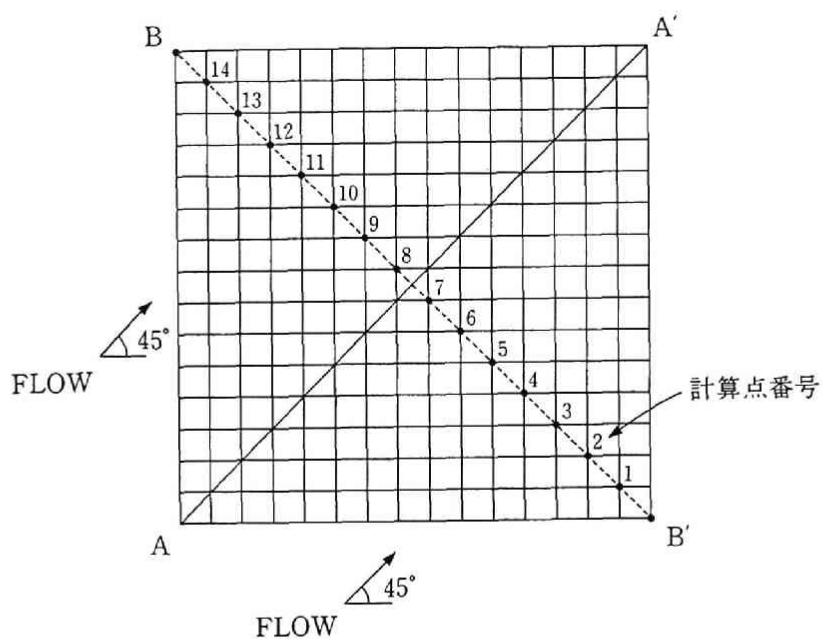


図5.1.3 スカラー量の2次元計算領域

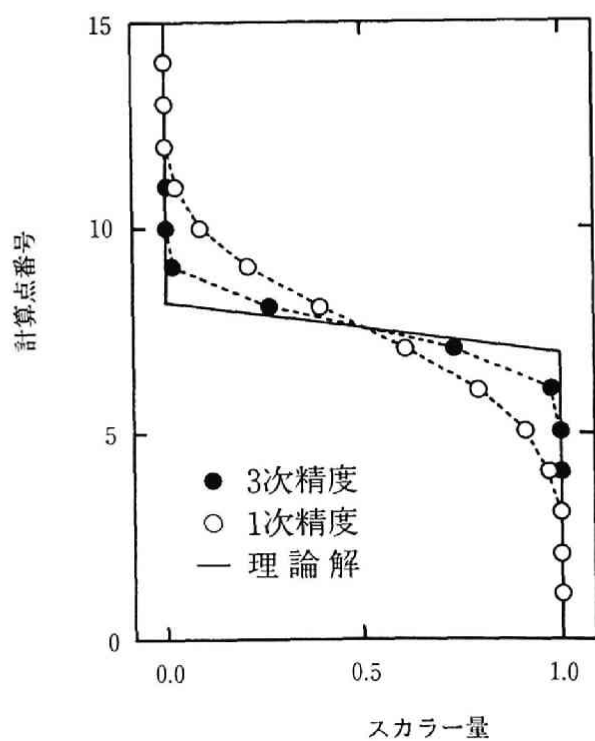


図5.1.4 対角線BB'上のスカラー量の分布

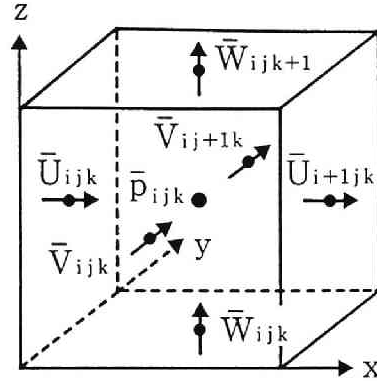


図5.1.5 連続式の差分化に用いる流速成分

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\Delta x^2} \bar{p}_{i+1,j,k} - \frac{1}{\Delta x^2} \bar{p}_{i-1,j,k} - \frac{1}{\Delta y^2} \bar{p}_{i,j+1,k} - \frac{1}{\Delta y^2} \bar{p}_{i,j-1,k} \\
 & - \frac{1}{\Delta z^2} \bar{p}_{i,j,k+1} - \frac{1}{\Delta z^2} \bar{p}_{i,j,k-1} = \frac{\gamma \rho_s}{\Delta t} (F P_{i,j,k} + D_{i,j,k}^n) \quad \text{---(5.1.9)}
 \end{aligned}$$

ここで、 $F P_{i,j,k}$ は(5.1.6)、(5.1.7)、(5.1.8)式の $F U_{i,j,k}$ 、 $F V_{i,j,k}$ 、 $F W_{i,j,k}$ 等に由来する項である。また、(5.1.9)式右辺の $D_{i,j,k}^n$ が、ブシネスク近似を用いないために現れた項である。本節では(5.1.9)式で表される圧力の解法について検討する。

(5.1.9)式で表される圧力に関する方程式は行列を用いて次のように表現される。

$$A s = b \quad \text{---(5.1.10)}$$

ここに $A$ は(5.1.9)式の圧力にかかる係数から構成される係数行列で、 $s$ は圧力の列ベクトルである。また、 $b$ は(5.1.9)式右辺で表される係数の列ベクトルである。(5.1.10)式で表される大規模な連立1次方程式の解法に関しては、ガウスの消去法系統の算法ではメモリ上の問題が生ずると言われており<sup>3)</sup>、過去においてはSOR法<sup>4)</sup>(Successive Over-relaxation Method)、ADI法<sup>5)</sup>(Alternating Direction Implicit Method)等の反復解法が用いられた。しかしながら、これらの手法は汎用性や収束するまでの反復計算の回数等の点で問題があると指摘されている<sup>3)</sup>。



(5.1.10)式における係数行列Aは、行列の要素の大部分が0である大規模疎行列であり、非ゼロ要素の配置は対角線に対して対称であるが、その要素の値は必ずしも対称でない規則的非対称疎行列となっている。行列Aがこのような性質を持つ場合1つの有効な解法としては、双対共役勾配法<sup>3)</sup>(Biconjugate Gradient Method:BCG法)がある。係数行列Aはここでは非対称行列であるので、

$$A \neq A^T \quad \text{---(5.1.11)}$$

である。BCG法は、次の  $f(s)$

$$f(s) = (s, Ab) - \frac{1}{2}(b, s) \quad \text{---(5.1.12)}$$

を最小にするような  $s$  を反復計算により求めることによって解を得るものである。ここに  $(s, Ab)$  は  $s$  と  $Ab$  の内積を表す。 $k+1$  ステップの反復計算で得られる解  $s_{k+1}$  が

$$s_{k+1} = s_k + \alpha_k p_k \quad \text{---(5.1.13)}$$

で表されるとき、 $f(s_k + \alpha_k p_k)$  を最小とする  $\alpha_k$  は次式により与えられる。

$$\alpha_k = (r_k, r_k^*) / (A p_k, p_k^*) \quad \text{---(5.1.14)}$$

$k+1$  ステップの  $r_{k+1}$ ,  $r_{k+1}^*$  は

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k \quad \text{---(5.1.15)}$$

$$r_{k+1}^* = r_k^* - \alpha_k A^T p_k^* \quad \text{---(5.1.16)}$$

により求められる。また、 $k+1$  ステップの  $p_{k+1}$ ,  $p_{k+1}^*$  は

$$\beta_k = (r_{k+1}, r_{k+1}^*) / (r_k, r_k^*) \quad \text{---(5.1.17)}$$

で表される  $\beta_k$  を用いて

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k \quad \text{---(5.1.18)}$$

$$p_{k+1}^* = r_{k+1}^* + \beta_k p_k^* \quad \text{---(5.1.19)}$$

で求められる。従って、ある初期値  $s_0$ ,  $r_0$ ,  $r_0^*$ ,  $p_0$ ,  $p_0^*$  が与えられれば、次のステップの  $s_k$  を順次求めてゆくことができる。BCG法では、原理的に有限回の反復回数で解が収束することが示されている<sup>3)</sup>。

BCG法による反復計算を行う前に、係数行列Aに前処理を施すことにより、収束を早めることができる。本研究で用いる手法では、係数行列Aに対して不完全LDU分解(incomplete LDU decomposition)を前処理として行う。すなわち、

$$A = L D U - R \quad \text{---(5.1.20)}$$

ここに、L：下三角行列、D：対角行列、U：上三角行列、であり、Rは残差行列である。完全LDU分解では上式でAとLDUが一致し、Rがゼロ行列となるが、完全LDU分解によりゼロ要素が非ゼロ要素となる状態(fill-in)が発生して、行列が疎行列でなくなること防ぐために残差行列Rを考慮した不完全LDU分解を行っている。また、Rの要素をできるだけ0に近づけるような操作(modification)をさらに加えることにより、収束速度を高める方法をとっている。このような方法はMILUBCG法(Modified Incomplete LDU Decomposition Biconjugate Gradient Method)と呼ばれている<sup>3)</sup>。本研究ではこの方法により圧力に関する方程式(5.1.10)式の解を求めることとしている。

### 5. 1. 3 自由液面の解析方法

前述したように、液体ナトリウムを冷却材とする高速増殖炉では、原子炉トリップ時に冷却材の温度が大きく低下するため、冷却材の収縮が生じてその液位が低下すると考えられている。前章では、Boussinesq近似を用いない2方程式乱流モデルの基礎方程式系を導き、その結果すでに温度変化による膨張、収縮といった現象が連続方程式(4.1.18)式中に考慮されたものとなっている。本研究では、この液位の変化を数値解析的にシミュレートできるものとするため、MAC法<sup>6)</sup>(Marker and Cell Method)を応用した自由液面の解析手法を用いた。

MAC法は、マーカーを用いて流体とその外部領域とを区別するものであるが、砕波現象のように液面形が極端に変形する現象や液面勾配が著しく大きくなる場合等を除けば、マーカーを使用せずに自由液面形状から液面近傍の境界条件を決定して、自由液面の変化を計算してゆくことが可能となる<sup>7)</sup>。本研究では武本ら<sup>8)</sup>によって提案された手法に対して、液面近傍の境界条件の設定等に若干の改良を加えた方法により、液位の変化を計算するものとした。なお、ここでは2次元円筒座標系( $r-z$ 平面)を対象とした解析手法について述べることにする。

計算メッシュから構成される各セルに対して、その内部に液面を含んだものをS、液面より下方のものをF、液面を含んだセルより上方にあるものをEと記号づけすれば、自由

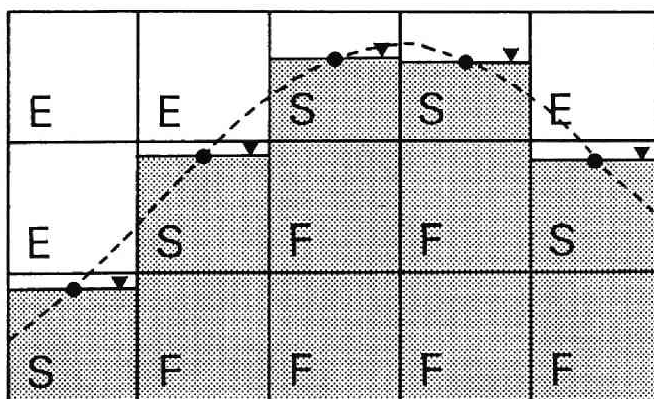


図5.1.6 自由液面近傍の計算メッシュの記号付け

液面近傍の状態の一例は図5.1.6のように示される。自由液面の液面勾配が、計算メッシュの縦横比  $\Delta z / \Delta r$  を越えないという条件をつけると、液面を含んだSのセルの周囲の状況としては、図5.1.7に示した9通りのものが考えられる。さらに、対象とするセルを含む列とその左側の列のみに着目すれば、結局これらの9通りの状態はA～Cグループの3通りの状態に帰着することがわかる。このため、これら2列の記号づけの状態に応じて左側から順次液面近傍の境界条件を決定してゆくことが可能となる。

これら3種類の状態における液面近傍の流速の境界条件の設定の方法を図5.1.8(a)～(c)に示す。図中でUは半径方向の平均流速成分、Vは鉛直方向の平均流速成分を表す。図5.1.8(a)の状態では、着目するSのセルの左側にEのセルが存在しており、この場合には、

$$\overline{U}_{i,j} = \overline{U}_{i,j-1} \quad \text{---(5.1.21)}$$

とおき、 $\overline{V}_{i,j+1}$ に関しては、Sのセル内の流体の連続性が満足されるように、単位時間あたりのSのセル内の流体の増分  $\Delta V$

$$\Delta V = \Delta h \Delta r \quad \text{---(5.1.22)}$$

がSのセル内への流入量  $\Delta Q$

$$\begin{aligned} \Delta Q = & \overline{U}_{i,j}(h + \Delta h) - \overline{U}_{i+1,j}\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)(h + \Delta h) \\ & + \overline{V}_{i,j}\Delta r - \overline{V}_{i,j+1}\Delta r \end{aligned} \quad \text{---(5.1.23)}$$

に等しいとおくことにより求める。(5.1.22)、(5.1.23)式中で、 $\Delta h$ は単位時間内の液位の変化量を表す。図5.1.9にこのセルの状態を模式的に示した。なお、Sのセル内では、連続式(5.1.4)式で考えたような温度変化による密度変化の影響は小さいと考えて、これを無視した。 $\Delta V = \Delta Q$ とすれば、(5.1.22)式と(5.1.23)式より $\overline{V}_{i,j+1}$ に関して次式が得られる。

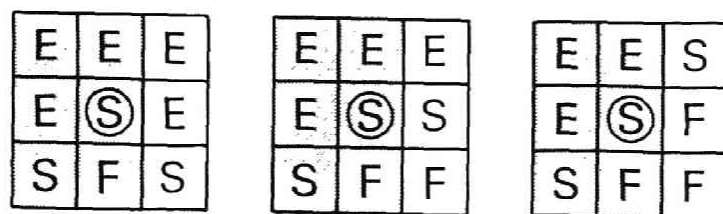
$$\begin{aligned} \overline{V}_{i,j+1} = & \overline{V}_{i,j} + \frac{1}{\Delta r}(h + \Delta h)\overline{U}_{i,j} \\ & - \frac{1}{\Delta r}\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)(h + \Delta h)\overline{U}_{i+1,j} - \Delta h \end{aligned} \quad \text{---(5.1.24)}$$

(5.1.21)式により $\overline{U}_{i,j}$ を定めた後、(5.1.24)式を用いて $\overline{V}_{i,j+1}$ が決定される。次に、図5.1.8(b)に示されるようにSのセルの左側にSのセルが存在する場合には、まず(5.1.24)式を用いて $\overline{V}_{i,j+1}$ を決定し、その後液面における次の接線方向の応力条件式<sup>9)</sup>

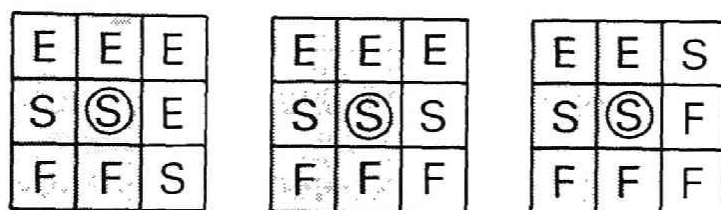
$$\mu \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{---(5.1.25)}$$

を用いて $\overline{U}_{i,j+1}$ を定める。ここに $\mu$ は粘性率である。これを差分式で表示すれば、

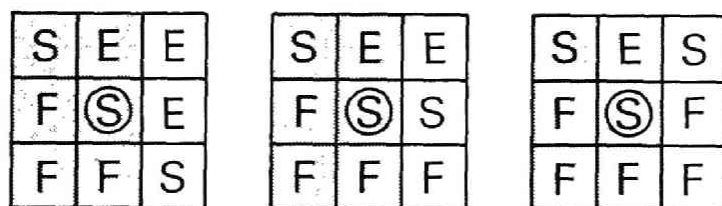
$$\overline{U}_{i,j+1} = \overline{U}_{i,j-1} - \frac{\Delta z}{\Delta r} (\overline{V}_{i,j+1} - \overline{V}_{i-1,j+1} + \overline{V}_{i,j} - \overline{V}_{i-1,j}) \quad \text{---(5.1.26)}$$



(a) A-GROUP

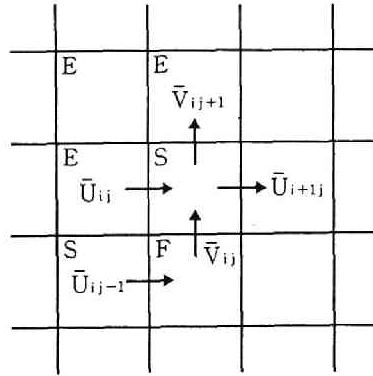


(b) B-GROUP

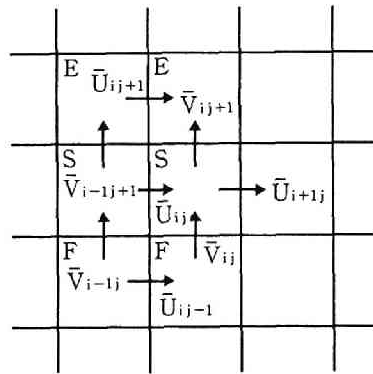


(c) C-GROUP

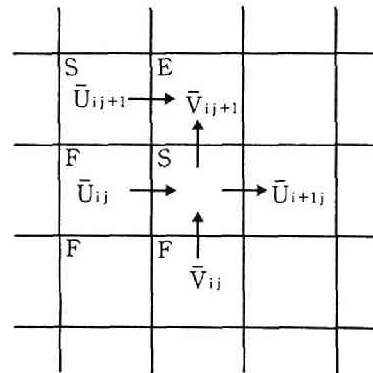
図5.1.7 自由液面を含んだ計算メッシュの周囲の状況



(a) A-GROUP



(b) B-GROUP



(c) C-GROUP

図5.1.8 自由液面近傍の流速の境界条件の設定方法

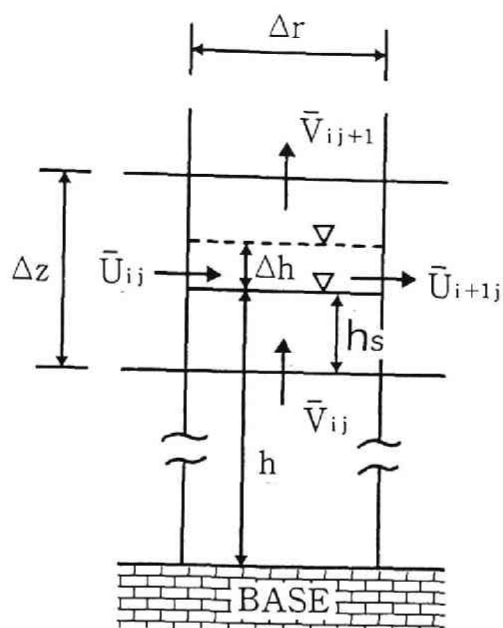
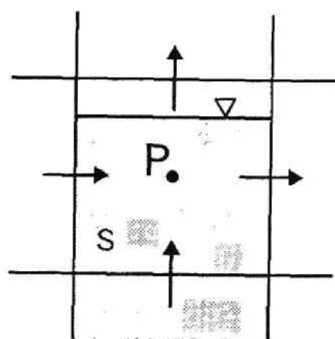
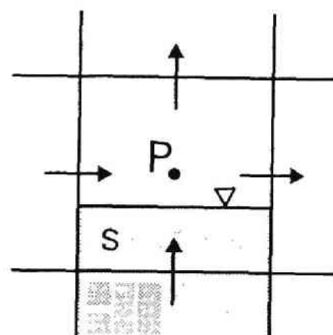


図5.1.9 自由液面を有する計算メッシュ



(a) 圧力の定義点よりも上方に  
自由液面が存在する場合



(b) 圧力の定義点よりも下方に  
自由液面が存在する場合

図5.1.10 自由液面近傍の圧力の境界条件

となる。最後に図5.1.8(c)の場合では、まず

$$\overline{U}_{i,j+1} = \overline{U}_{i,j} \quad \text{---(5.1.27)}$$

とし、その後に(5.1.24)式を用いて $\overline{V}_{i,j+1}$ を決定する。

圧力に関しては、図5.1.10(a)に示すように、Sのセル内の中央にある圧力の定義点より上方に液面が存在する場合には、Sのセル内の圧力までが計算領域となり、Sのセルの直上のEのセルの圧力は、境界条件として、液面上の圧力が0となるように静水圧分布を仮定して外挿計算により求めた値とする。一方、図5.1.10(b)に示すように、Sのセル内の圧力の定義点より下方に液面がある場合には、計算領域はSの直下のFのセルまでとし、Sのセルの圧力に上述と同様の外挿計算により得られる圧力値を境界条件として設定する。

また、乱れの運動エネルギー $k$ 、その散逸率 $\varepsilon$ そして温度 $\Theta$ に関する計算領域はSのセルまでであり、液面の境界条件としては、Sの直上のEのセルにSのセルと等しい値を設定する形とした。流体の液位 $h$ は液面における運動学的条件<sup>10)</sup>を表す次の関係式を用いて求める。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \overline{V} - \overline{U} \frac{\partial h}{\partial r} \quad \text{---(5.1.28)}$$

液位 $h$ は、流速や温度等と同様に非定常計算により各時刻の値が計算される。

#### 5.1.4 圧力と自由液面の解析手法の有効性

本節では、5.1.2および5.1.3で述べた自由液面の解析方法や圧力方程式の解法が妥当であることを検証するため、ごく単純化した流れの場を対象とした数値解析を行う。解析では、流体の液位の変化を検討するために、温度によって密度が大きく変化する流体を想定して、図5.1.11に示すような出入口のない円筒容器内に満たされた流体が、空間的に均一に、時間的に一定の割合で冷却されるという状態を考えた。ここでは、流体の温度が空間的に均一であるため、温度 $\Theta$ の空間微分が0であることを考慮すれば、(5.1.4)式は2次元円筒座標系において次式のような形として表わされる。

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial r} + \frac{\overline{U}}{r} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} = \frac{\beta}{\gamma} \Phi \quad \text{---(5.1.29)}$$

同様に、(4.1.41)式で示されるエネルギー方程式は次のような簡単な形となる。

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\Phi}{\gamma} \quad \text{---(5.1.30)}$$

すなわち、 $\Phi/\gamma$ を負の定数とすることにより、流体の温度は時間的に一定の割合で低下してゆき、(5.1.29)式を満足しながら収縮してゆく。解析の際には上記の(5.1.29)、(5.1.30)式の他に(4.1.40)式で示される運動方程式と(4.1.57)式および(4.1.64)式で示される $k$ および $\varepsilon$ に関する方程式を連立させて非定常計算を行った。ただし(4.1.57)式中の $Q_i$ を含む項は無視した。モデルの定数値は、表5.1.1に従うものとした。

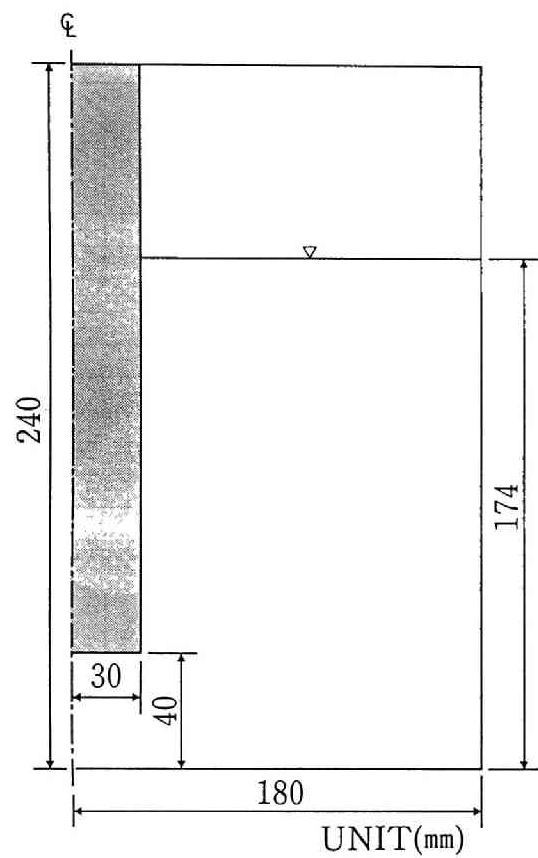


図5.1.11 円筒容器の形状

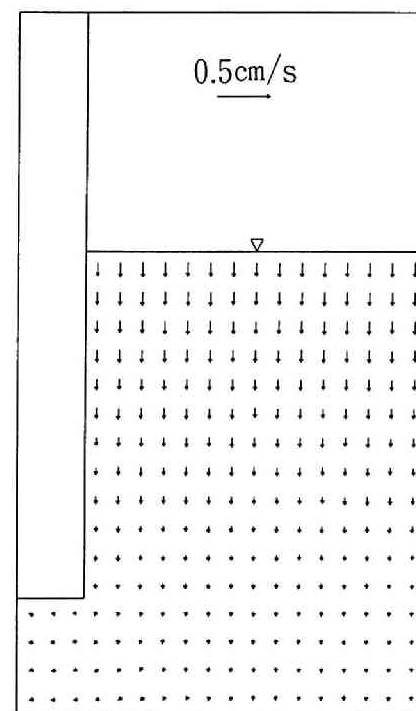


図5.1.12 解析開始から10秒後の流速ベクトルの分布



表5.1.1 解析モデルの係数値

$C_k(\gamma)$	$C_\varepsilon(\gamma)$	$C_{\varepsilon_1}(\gamma)$	$C_{\varepsilon_2}(\gamma)$	$C_\nu$
0.09	0.075	1.44	1.90	0.09

また、流体の物性値および  $\overline{\partial \Theta / \partial t}$  の値としては液位の変化が比較的大きくなるように次のような値とした。

$$\beta = 0.01 \text{ (1/}^\circ\text{C)} \quad \text{---(5.1.31-a)}$$

$$\overline{\partial \Theta / \partial t} = -1.0 \text{ (}^\circ\text{C/sec)} \quad \text{---(5.1.31-b)}$$

解析開始から10秒後の液位と流速ベクトルの分布を図5.1.12に示す。図5.1.12では、流体の収縮に伴って液位が低下し、液面に近い程大きな流速を有する、下方へ向かう流速ベクトルが生じていることがわかる。図5.1.13は、図5.1.11で表される円筒容器内の  $r = 125 \text{ (mm)}$  における液位の時間的な変化を示したものである。図中の  $H$  は初期状態の液位を表す。本節で対象とした単純な条件下では、液位の低下量の理論値を求めることができる。図5.1.13にはこの結果を数値解析結果と合わせて示した。解析により得られた液位低下の傾向には有意な振動等は見られず、図5.1.13に表わされるように理論値と良く一致した。

次に、圧力方程式の解法の有効性を検討するため、上述の数値解析において、初期状態 ( $t = 0$ ) から時間ステップ  $\Delta t$  秒後 ( $t = \Delta t$ ) の時間的に1ステップの間の圧力の繰り返し計算の回数とその誤差の最大値との関係を求めた。この結果を図5.1.14に示す。本研究で用いるMILUBCG法では、繰り返し回数が50回程度で誤差の値が  $10^{-10}$  程度となるのに対し、SOR法ではこれと同一の精度を得るためにはその10倍以上の繰り返し回数が必要となっている。本研究における数値解析のように液位の変化が適切に計算される必要がある場合には、連続式が充分精度良く満足されることが要求される。従って、MILUBCG法はSOR法と比較して有利であると考えられる。

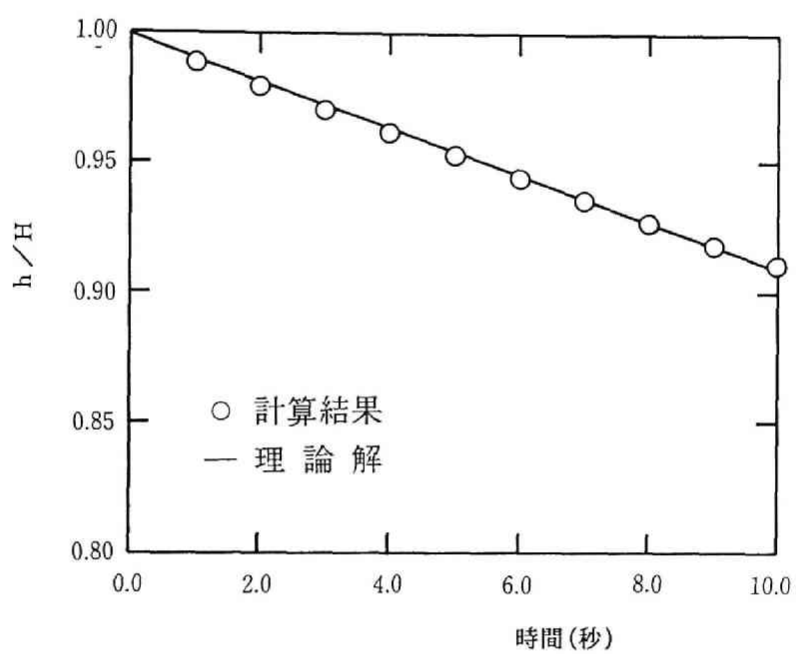


図5.1.13 流体の液位の時間的变化

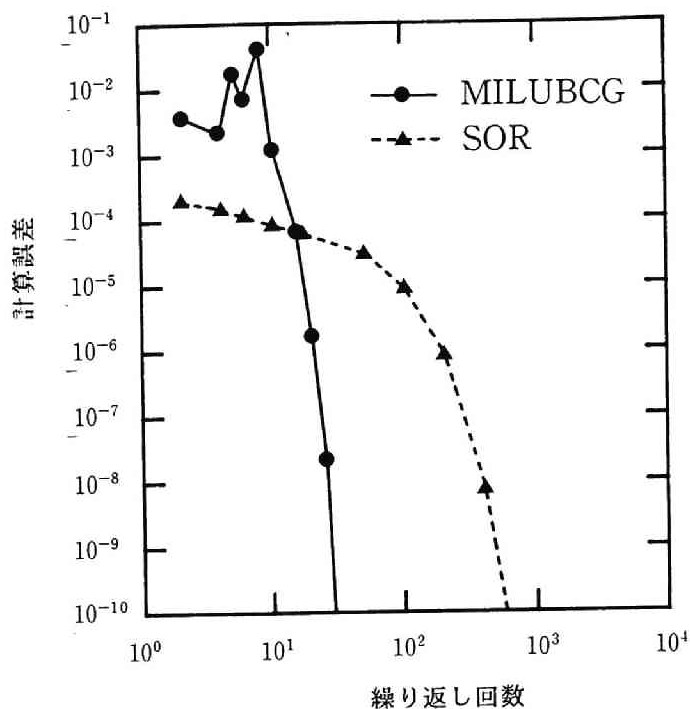


図5.1.14 圧力計算の繰り返し回数と計算誤差の関係

## 5. 2 解析モデルの成層流への適用性

### 5. 2. 1 乱流モデルによる成層流の数値解析

第2章で明らかとなったように、既往の2方程式乱流モデルでは定数とされていたいくつかのモデル係数は、成層流中では浮力の効果を受けるため、成層度の強さを表すパラメータの関数となる。ここでは、第2章の成層流の乱流計測実験で得られた関係式を解析モデル中に導入してモデルの改良を行い、これを用いて成層流の数値解析を行った。そしてこのモデルによる解析結果と既往のモデルによる解析結果との比較を行い、改良されたモデルの有効性を検討した。

# (1) 解析モデル

数値解析は、 $\overline{W}=0$  および  $\partial(\overline{\dots})/\partial z=0$  なる条件が成り立つ2次元場を対象として行った。座標系と変数の記号は第2章と同様である。解析で用いた基礎方程式系は以下のとおりである。

## ① 連続式および運動方程式

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = 0 \quad \text{---(5.2.1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u u} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u v} \end{aligned} \quad \text{---(5.2.2-a)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \{1 - \beta(\overline{\Theta} - \Theta_s)\} g \\ & + \nu \left( \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u v} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v v} \end{aligned} \quad \text{---(5.2.2-b)}$$

## ② エネルギー方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} = & \alpha \left( \frac{\partial^2 \overline{\Theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Theta}}{\partial y^2} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u \theta} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v \theta} \end{aligned} \quad \text{---(5.2.3)}$$

## ③ 乱れエネルギー $k$ およびエネルギー散逸率 $\varepsilon$ に関する方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{k}}{\partial y} = & P_k + \beta g \overline{v \theta} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( C_k \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \overline{k}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( C_k \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \overline{k}}{\partial y} \right\} \\ & - \varepsilon \end{aligned} \quad \text{---(5.2.4)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial x} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial y} \right\} \\ & + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad \text{---(5.2.5)}$$

ここに、 $P_k$  は

$$P_K = - \left( \overline{u u} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \overline{u v} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{u v} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \overline{v v} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \right) \quad \text{--- (5.2.6)}$$

である。

④温度変動量  $\theta^2$  に関する方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + \overline{U} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x} + \overline{V} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial y} = & -2 \left( \overline{u \theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x} + \overline{v \theta} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( C_{T1} \frac{k^2}{\varepsilon} + \alpha \right) \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( C_{T1} \frac{k^2}{\varepsilon} + \alpha \right) \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial y} \right\} \\ & - \varepsilon_\theta \end{aligned} \quad \text{--- (5.2.7)}$$

以上の方程式中で、 $\nu$  は動粘性係数、 $\alpha$  は熱拡散係数であり、 $\beta$  は体膨張係数である。実験式を用いて改良した解析モデルと既往のものとの相違を明らかにするため、以下のような3つのモデルを設定する。

①MODEL-1: このモデルは実験式を用いない既往のモデルであり、上記の基礎方程式中のレイノルズ応力および乱流熱フラックスに対して、次式で示される関係式を用いる。

$$- \overline{u_i u_j} = \varepsilon_M \left( \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad \text{--- (5.2.8)}$$

$$- \overline{u_i \theta} = \varepsilon_H \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i} \quad \text{--- (5.2.9)}$$

$$\varepsilon_M = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{--- (5.2.10)}$$

$$\varepsilon_H = \varepsilon_M / \text{Pr}_t \quad \text{--- (5.2.11)}$$

$$\text{Pr}_t = 1 \quad \text{--- (5.2.12)}$$

また、(5.2.7)式中の係数  $C_{T1}$  は2.2でも触れたように、Launder<sup>11)</sup>と同様に次のような定数とした。

$$C_{T1} = 0.13 \quad \text{--- (5.2.13)}$$

さらに、 $\varepsilon_\theta$  はLaunder<sup>12)</sup>によって示された(3.2.57)式を用いて表される。すなわち、

$$\varepsilon_\theta = \frac{2}{C_T} \frac{\varepsilon \theta^2}{k} \quad \text{--- (5.2.14)}$$

解析モデルの係数値を表5.2.1に示す

表5.2.1 係数値 (MODEL-1)

$C_\nu$	$C_K$	$C_\varepsilon$	$C_{\varepsilon_1}$	$C_{\varepsilon_2}$	$C_T$
0.09	0.09	0.075	1.44	1.90	1.6

②MODEL-2:このモデルでは、係数 $C_{\tau 1}$ の値をMODEL-1と同様に0.13とする以外は、2.2で得られた関係式を用いる。すなわち、次の関係式を用いる。

$$\frac{\overline{u^2}}{k} = \frac{2(1+0.17R_i)(1+0.37R_i)}{0.0629R_i^2 + 0.79R_i + 2} \quad \text{---(5.2.15-a)}$$

$$\frac{\overline{v^2}}{k} = \frac{0.8(1+0.37R_i)}{0.0629R_i^2 + 0.79R_i + 2} \quad \text{---(5.2.15-b)}$$

$$\varepsilon_M = C \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{1-1.5R_i}{1+1.5R_i} \quad (0 \leq R_i \leq \frac{1}{1.5}) \quad \text{---(5.2.16-a)}$$

$$\varepsilon_M = 0 \quad (\frac{1}{1.5} \leq R_i) \quad \text{---(5.2.16-b)}$$

$$\varepsilon_H = \frac{1}{Pr_{to}} \frac{1-1.5R_i}{1+2.6R_i} \varepsilon_M \quad (0 \leq R_i \leq \frac{1}{1.5}) \quad \text{---(5.2.17-a)}$$

$$\varepsilon_H = 0 \quad (\frac{1}{1.5} \leq R_i) \quad \text{---(5.2.17-b)}$$

ここで、 $1/Pr_{to}$ は1.6である<sup>12)</sup>。他の点に関しては、MODEL-1と同様である。

③MODEL-3:このモデルは、MODEL-2の $C_{\tau 1}$ を2.2で得られた次のような関係式で表すものである。

$$C_{\tau 1} = C_{\tau 1} f_{\tau} = \frac{0.06}{1+10R_i^2} \quad \text{---(5.2.18)}$$

他の部分は、全てMODEL-2と同様である。

## (2)解析方法

基礎方程式中の非線形項の解析と圧力のポアソン方程式の解法には5.1で述べた方法を用いた。計算領域は、鉛直方向は底面から自由水面まで、また流下方向はセパレータ先端を含む断面から下流1.5mまでの2次元領域である。

境界条件は以下のとおりである。水路上流端部分の境界条件としては、平均流速、平均温度および乱流量の実験計測値を用いた。このうち、エネルギー散逸率 $\varepsilon$ の値としては、(2.2.8)式に基づいて算出した値を用いた。水路下流端部分では、諸変数の流下方向の勾配の値を0とした。また、水路底面付近では実験から得られた対数則<sup>13)</sup>を用いて、 $\overline{U}$ の境界条件を定めた。また、 $\overline{V}$ は底面で0、乱流量に対してはフリースリップ条件を用いた。自由水面に関しては、実験では水表面の波立ち等の現象は見られず、また水深も流下方向にほぼ一定の値であったため、本解析では水深を固定した値とし、流速および乱流量に対しては、フリースリップ条件を水表面の境界条件とした。

## (3)解析結果

数値解析の対象とした成層流は、表2.1.1中のRUN-S1であり、表5.2.2に示すような実験

条件に従うものである。

表5.2.2 実験条件

RUN NO.	$U_1$ (m/s)	$U_2$ (m/s)	$T_1$ (°C)	$T_2$ (°C)	$Re$ $\times 10^4$ (-)	$Pe$ $\times 10^5$ (-)	$\overline{R_i}$ (-)
RUN-S1	0.049	0.113	20.1	14.3	1.54	1.28	0.649

表中の記号は第2章と同様である。数値解析結果と実験結果との比較は  $x=1.0$ (m)における鉛直断面内で行った。

図5.2.1および図5.2.2に実験および数値解析(MODEL-1およびMODEL-2)で得られた平均流速分布と平均温度分布を示す。MODEL-2による解析結果は、既往の  $k-\varepsilon$  モデルであるMODEL-1によるものと比較して、運動量および熱のせん断層厚さが小さく、より実験値に近いものとなっている。図5.2.3および図5.2.4は、渦動粘性係数  $\varepsilon_m$  と乱流熱拡散係数  $\varepsilon_h$  の分布を示すものである。MODEL-1では乱流プラントル数を1としているために、渦動粘性係数と乱流熱拡散係数は同一形状の分布となっており、両者とも実験値の約2倍程度と過大に計算されている。一方、MODEL-2の解析結果は実験値とほぼ一致したものとなっており、このことから乱流拡散係数あるいは乱流プラントル数に対する成層度の影響を考慮した(5.2.16)、(5.2.17)式が有効に作用したものと考えられる。またさらに、これらの乱流拡散係数の分布の相違が、図5.2.1および図5.2.2に見られる平均流速や平均温度の分布の相違をもたらした一因であると考えられる。図5.2.5は、乱れの運動エネルギーに対する実験結果とMODEL-2による解析結果とを示すものである。図に示されるように、解析結果は実験結果とよく一致するものとなった。また、図5.2.6は、乱れの運動エネルギーの散逸率に対する実験結果とMODEL-2による解析結果を示すものである。図中の  $\varepsilon$  の分布は、図5.2.5に示される  $k$  の分布と比較すれば実験値との差異がわずかに大きくなっている。この点に関しては、 $\varepsilon$  の方程式中の温度に関係する項の取り扱い方<sup>14)</sup>をはじめとして、 $\varepsilon$  の方程式に対するより詳細な検討を行ってゆく必要があるかもしれない。図5.2.7は、温度変動強度  $(\theta^2)^{1/2}$  の分布を示すものである。図中には、MODEL-2およびMODEL-3の解析結果と実験結果が示されている。MODEL-2による解析結果は、ピーク値が小さく、また分布形状が上下に広がったものとなっている。これに対して、MODEL-3の解析結果では、これらの点が改善され、より実験結果に近いものとなっている。これは、 $\theta^2$  の方程式中の乱流拡散項の係数が(5.2.18)式によって、より適切に表現されたためであると考えられる。

なお、温度変動量の散逸率に関係する係数  $c_{\varepsilon}$  は、ここではLaunder<sup>12)</sup>によって示された1.6なる値を用いたが、ここで対象とした成層流では、数値解析により得られた(3.2.73)式で表される乱流レイノルズ数  $Re$  が  $10^3$  程度であったため、ほぼ適切であったと考えられる。

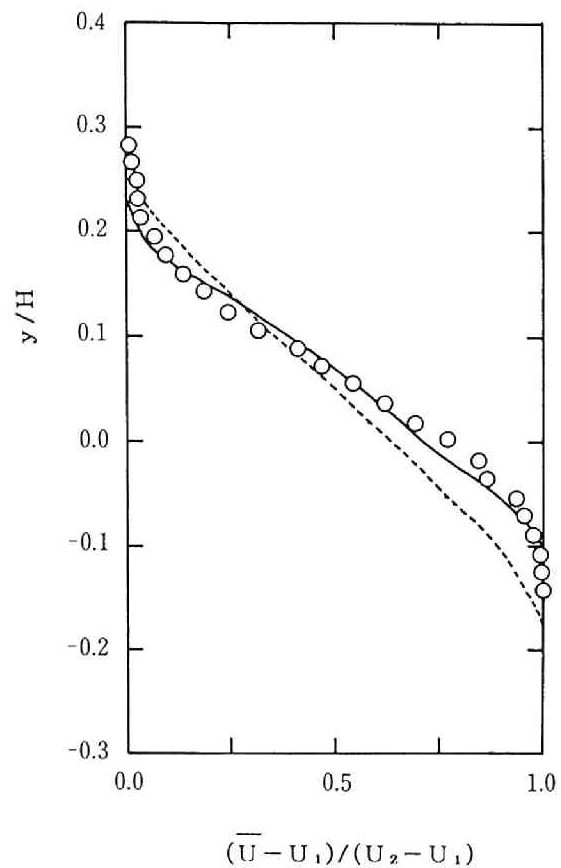


図5.2.1 平均流速の分布  
(○実験結果；----- MODEL-1；—— MODEL-2)

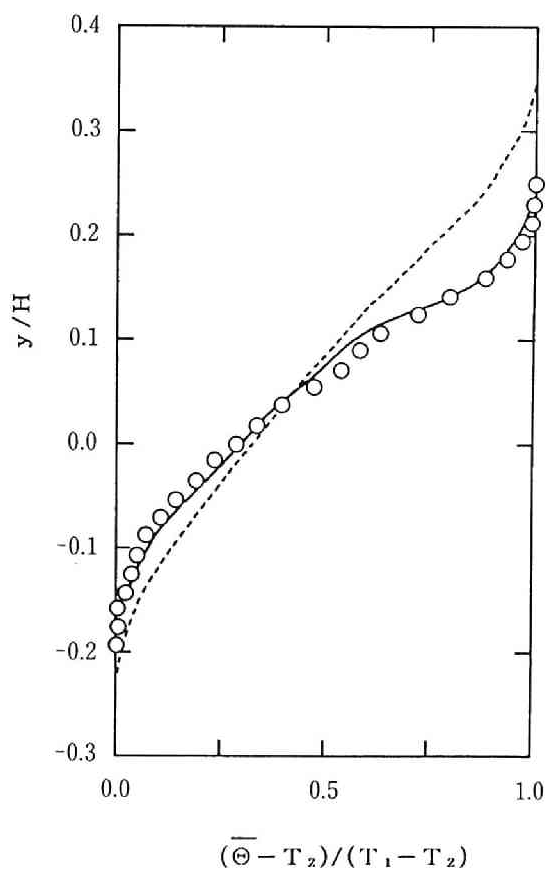


図5.2.2 平均温度の分布  
(○実験結果；----- MODEL-1；—— MODEL-2)



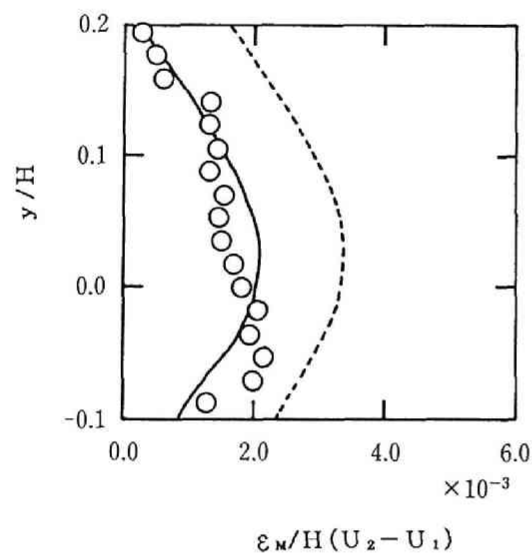


図5.2.3 渦動粘性係数の分布  
(○実験結果；----- MODEL-1；— MODEL-2)

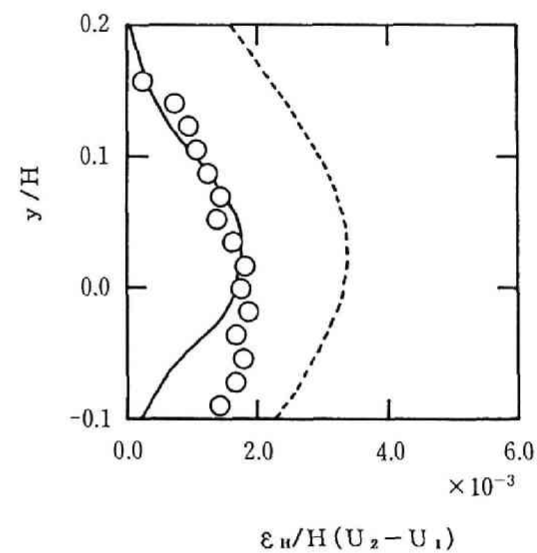


図5.2.4 乱流熱拡散係数の分布  
(○実験結果；----- MODEL-1；— MODEL-2)

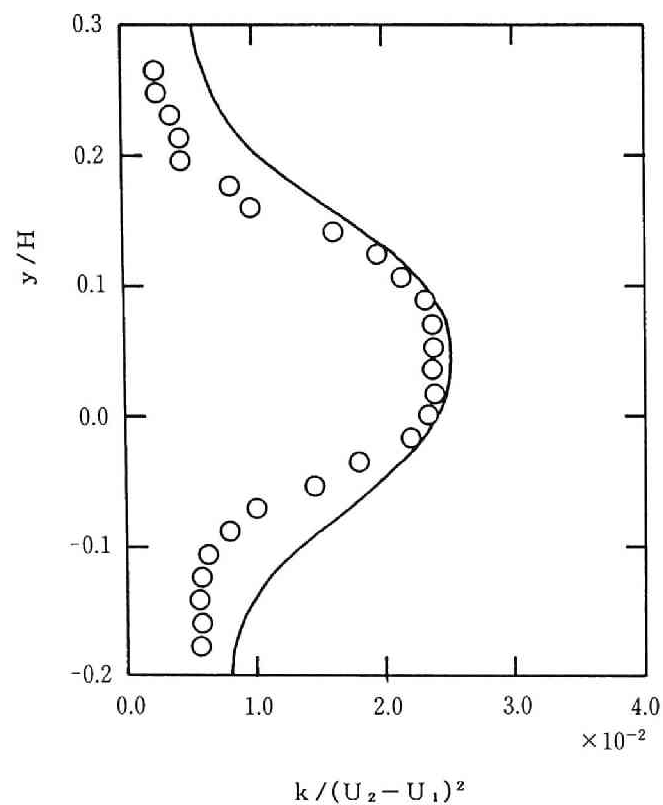


図5.2.5 乱れの運動エネルギーの分布  
(○実験結果；—— MODEL-2)

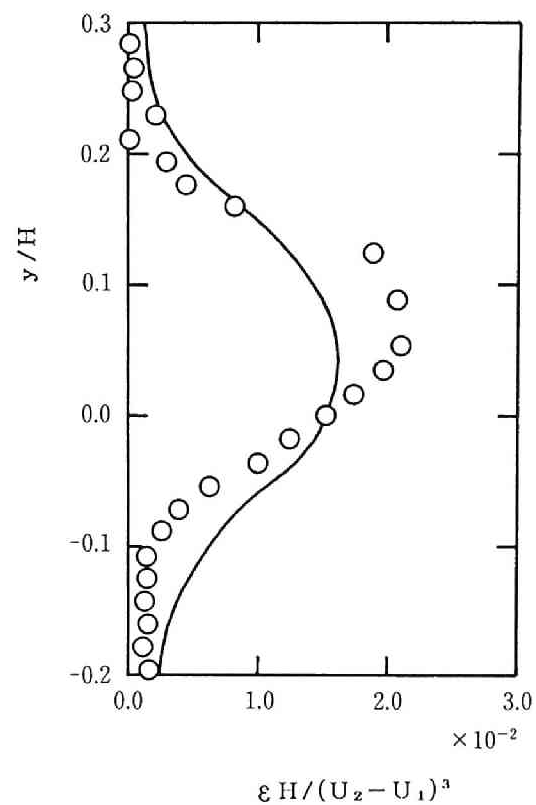


図5.2.6 エネルギー散逸率の分布  
(○実験結果；—— MODEL-2)

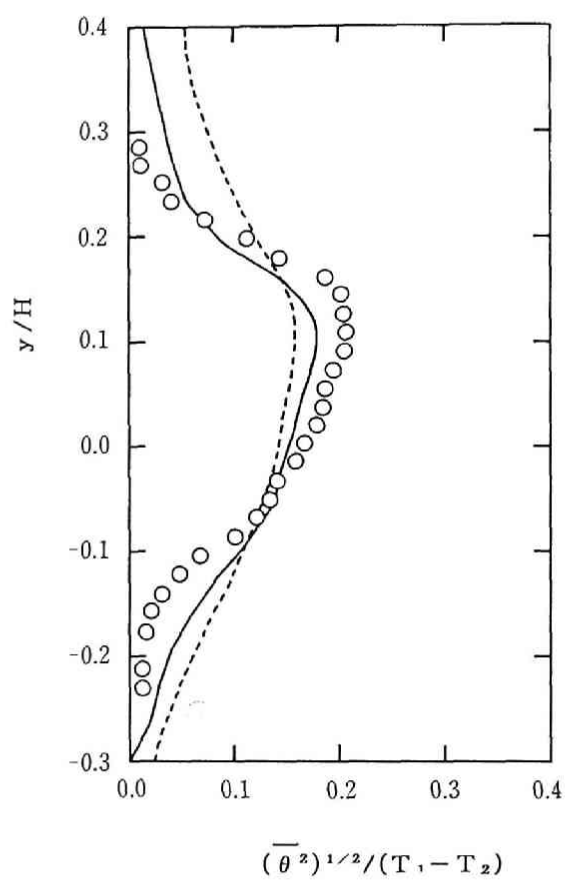


図5.2.7 温度変動強度の分布

(○実験結果；----- MODEL-2；—— MODEL-3)

## 5. 2. 2 成層流のラージエディシミュレーション

### (1)解析モデルと解析方法

4.2では非等温の流れに適用可能なSGSモデルについて検討を加えた。ここでは、このモデルを用いて成層流のラージエディシミュレーションを行う。解析モデルの基礎方程式のうち、連続式は(4.2.3)式、運動方程式とエネルギー方程式はそれぞれ(4.2.14)、(4.2.15)式で表される。また、サブグリッドスケールの乱れ量は、4.2で導かれた以下の諸関係式から求められる。まず、サブグリッドスケールの乱れエネルギーEに関する方程式は、(4.2.21)式より次のように表される。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j E}) = - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ C_{3m} \Delta E^{1/2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i u_j} + \frac{\partial E}{\partial x_j} \right) \} - \beta F_i \overline{u_i \theta'} - 3 C_E \frac{E^{3/2}}{\Delta} \quad \text{--- (5.2.19)}$$

ここに、

$$\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{1/3} \quad \text{--- (5.2.20)}$$

である。また、サブグリッドスケールのレイノルズ応力と乱流熱フラックスは(4.2.22)式から(4.2.25)式までを用いて表される。このうち特にサブグリッドスケールの乱流熱フラックスの鉛直方向成分 $-\overline{u_3 \theta'}$ と、サブグリッドスケールの温度変動量 $\theta'^2$ に対しては、(4.2.28)式および(4.2.29)式で表される次式を用いる。

$$-\overline{u_3 \theta'} = - \frac{\Delta}{C_s E^{1/2}} \left( - \overline{u_3^2} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} + \frac{2}{3} \beta_g \overline{\theta'^2} \right) \quad \text{--- (5.2.21)}$$

$$\overline{\theta'^2} = - \frac{2\Delta}{C_\theta E^{1/2}} \overline{u_3 \theta'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_3} \quad \text{--- (5.2.22)}$$

ここに、

$$\frac{1}{C_\theta} = \frac{b_1}{a_1 + a_2 \text{Pr} C_L R_T \lambda_0^2} + b_2 \left( \frac{\lambda C_L R_T}{a_1 + a_2 C_L R_T} \right)^{2/3} \quad \text{--- (5.2.23)}$$

$$\lambda^2 = 16 \text{Pr} \frac{a_1 + a_2 C_L R_T}{a_1 + 16 a_2 \text{Pr} C_L R_T \lambda_0^2} \quad \text{--- (5.2.24)}$$

$$R_T = \frac{E^2}{3 C_E \frac{E^{3/2}}{\Delta} \nu} = \frac{\Delta E^{1/2}}{3 C_E \nu} \quad \text{--- (5.2.25)}$$

である。上式中の係数値としては、第3、4章で用いた値を利用する。

数値解析は5.1で述べた方法により行った。LESではエネルギーを含んだ比較的大きいスケールの乱流現象そのものを数値解析の対象とするため、乱れの3次元性が重要なものとなる。このため、数値解析は3次元場を対象として行った。解析領域は、図2.1.2に示さ

れた座標系に対して  $x$  方向には  $0 \sim 0.6\text{m}$  まで、 $y$  方向には  $-40 \sim 60\text{mm}$  までの領域である。また解析では側壁面の影響のない主流域を対象としているので、 $z$  方向には両端にフリースリップ条件の境界面を有する  $50\text{mm}$  の長さの領域を解析領域とした。この解析領域とここでの座標系を図5.2.8に示した。

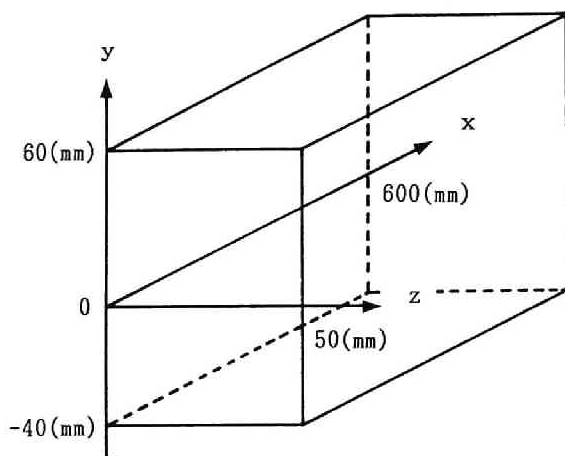


図5.2.8 解析領域と座標系

数値解析の対象とした成層流は、表2.1.1中に示されるRUN-S5である。また、ここではRUN-S5と同じバルクリチャードソン数  $Ri$  を有する液体金属ナトリウムの成層流を想定して(RUN-S5S)、この数値解析を行った。これらの水および液体金属ナトリウムの成層流の熱流動条件を表5.2.3に示した。また、表5.2.4には参考としてこれらの流体の物性値を示した。

表5.2.3 熱流動条件

RUN NO.	$U_1$ (m/s)	$U_2$ (m/s)	$T_1$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	$T_2$ ( $^{\circ}\text{C}$ )	Re $\times 10^4$ (-)	Pe $\times 10^3$ (-)	$\overline{Ri}$ (-)
S5	0.10	0.15	20.2	15.0	1.21	100	0.97
S5S	0.10	0.15	303.2	300	3.57	0.214	0.97

表5.2.4 水と液体金属ナトリウムの物性値

	$\nu$ $\times 10^{-6}$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	$\alpha$ $\times 10^{-6}$ ( $\text{m}^2/\text{s}$ )	$\beta$ $\times 10^{-4}$ ( $1/^{\circ}\text{C}$ )
水 ( $20^{\circ}\text{C}$ )	1.0	0.14	1.7
液体金属 ナトリウム ( $300^{\circ}\text{C}$ )	0.39	65	2.7

上流端では、流速の境界条件として、時間平均的な流速分布と時間的に変化する平均量からの流速変動を与えた。この流速変動は、実験で計測された流速の時系列から得られたものである。また、この流速変動の分散の値は、実験で計測された流速変動量と一致するものとした。上流端における温度の境界条件としては、時間平均的な温度分布のみを与えた。

## (2)水成層流(RUN-S5)の数値解析結果

図5.2.9に解析開始から12.5秒後における等温線と流速ベクトルの分布を示した。等温線は、次式で示される無次元化された温度に対して0.1～0.9まで、0.1きざみで書かれている。

$$\theta^* = \frac{\theta - T_2}{T_1 - T_2} \quad \text{--- (5.2.26)}$$

図中で太い実線で表されるものが値が0.5の等温線であり、細い実線および破線がそれぞれ0.6以上および0.4以下の値の等温線である。

また図5.2.10は、同時刻における流下方向流速  $u$  の等流速線図である。流下方向流速  $u$  は、成層流上流端の上下層流速の平均値  $U_m (=12.5\text{cm/s})$  と流速差  $\Delta u (=U_2 - U_1)$  を用いて、次式で無次元化されている。

$$u^* = \frac{u - U_m}{\Delta u} \quad \text{--- (5.2.27)}$$

図中の太い実線で表されるものが値が0.0の等流速線であり、細い実線および破線がそれぞれ正および負の値の等流速線で、これらの等値線の間隔は0.1である。図5.2.9および図5.2.10に示されるように、成層流のせん断領域では上下に波打った形で等温線あるいは等流速線が存在している。また、これらの等値線は3次元的な分布を示している。

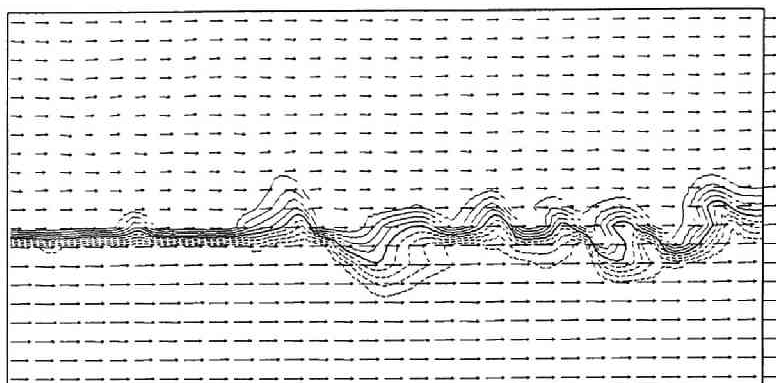
図5.2.11と図5.2.12には、それぞれ鉛直方向( $y$ 方向)と水路横断方向( $z$ 方向)の流速  $v, w$  の等流速線の分布を示した。これらの流速は、次式で無次元化されている。

$$v^* = v / \Delta u \quad \text{--- (5.2.28-a)}$$

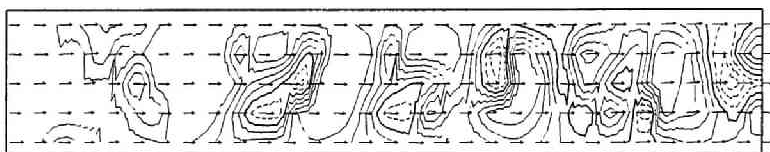
$$w^* = w / \Delta u \quad \text{--- (5.2.28-b)}$$

これらの図中の太い実線が値が0.0の等流速線であり、細い実線および破線がそれぞれ正および負の値の等流速線で、これらの等流速線の間隔は0.04である。これらの図中には、島状の等流速線が多数みられ、その空間的なスケールは流下に伴って増加する傾向がある。

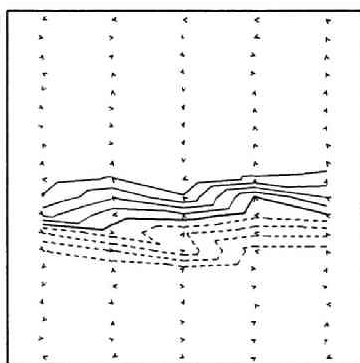
図5.2.13と図5.2.14には、サブグリッドスケールの乱れの運動エネルギー  $E$  とサブグリッドスケールの温度変動強度  $(\theta'^2)^{1/2}$  の等値線の分布を示した。これらは次式で無次元化されている。



(a)  $x-y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$   $\overline{25.}(\text{cm/s})$

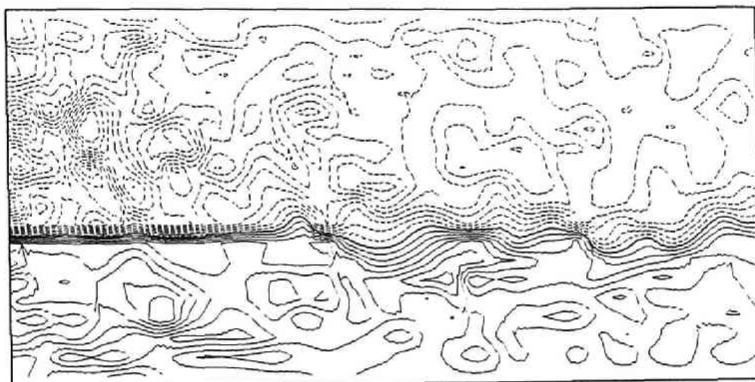


(b)  $x-z$  平面 :  $y = 2.5(\text{mm})$

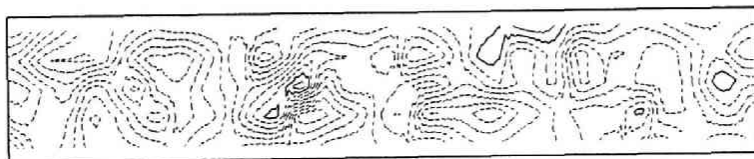


(c)  $y-z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

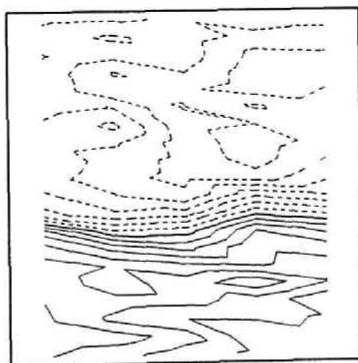
図5.2.9 等温線と流速ベクトルの分布 (RUN-S5)



(a)  $x y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$



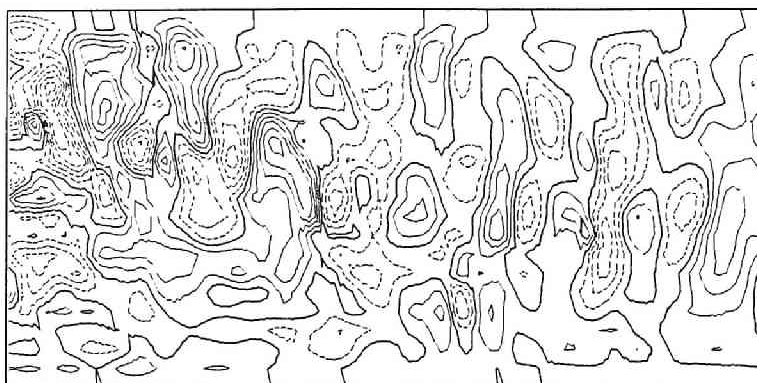
(b)  $x z$  平面 :  $y = 2.5(\text{mm})$



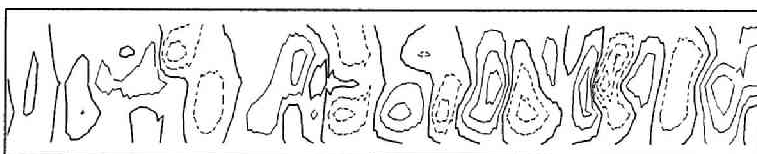
(c)  $y z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

図5.2.10  $\overline{u^*}$  の等流速線図 (RUN-S5)

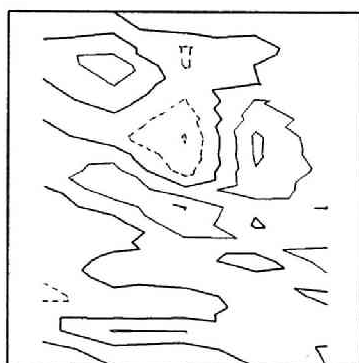




(a)  $x-y$  平面 :  $z=25(\text{mm})$

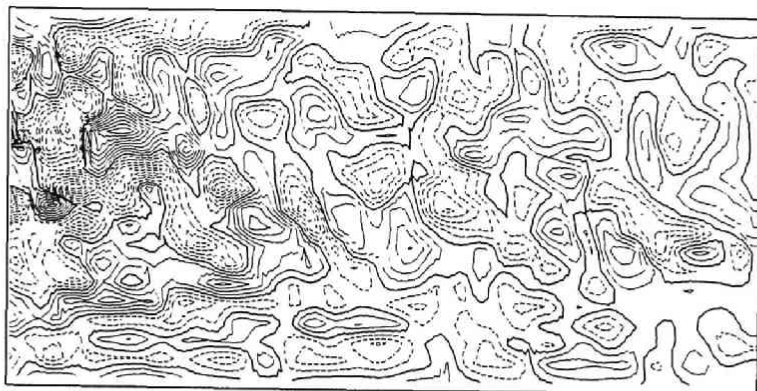


(b)  $x-z$  平面 :  $y=0(\text{mm})$

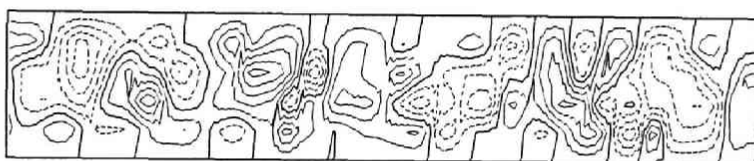


(c)  $y-z$  平面 :  $x=500(\text{mm})$

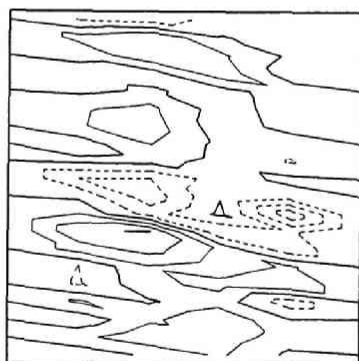
図5.2.11  $\overline{v}^*$  の等流速線図 (RUN-S5)



(a)  $xy$  平面 :  $z = 20$  (mm)

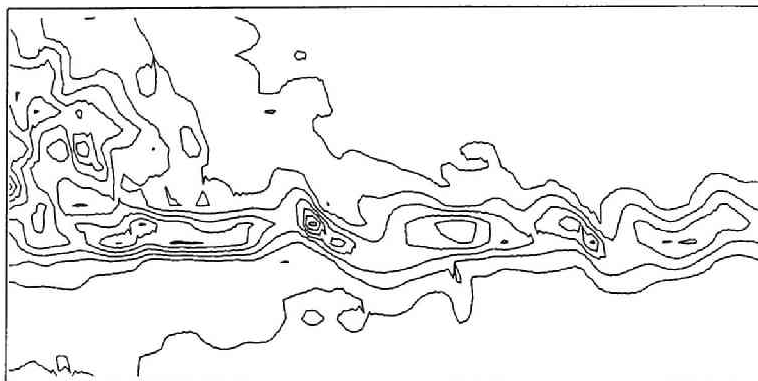


(b)  $xz$  平面 :  $y = 2.5$  (mm)

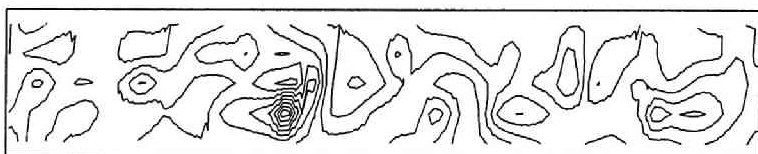


(c)  $yz$  平面 :  $x = 500$  (mm)

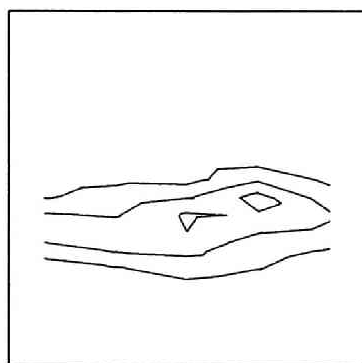
図5.2.12  $\overline{w^*}$  の等流速線図 (RUN-S5)



(a)  $x y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$

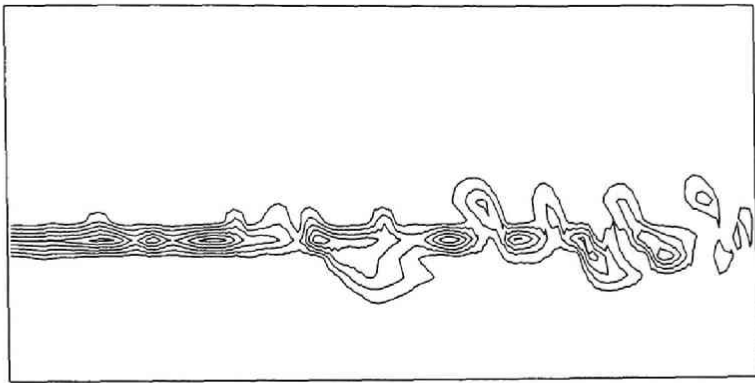


(b)  $x z$  平面 :  $y = 2.5(\text{mm})$

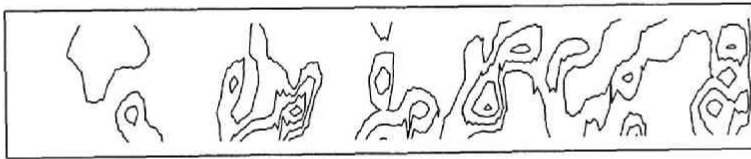


(c)  $y z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

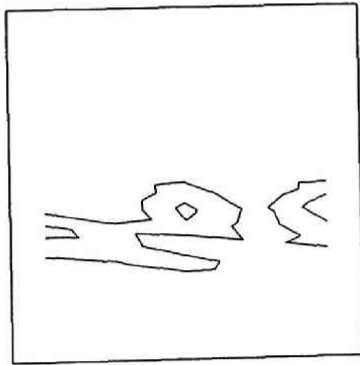
図5.2.13  $E^*$  の等値線図 (RUN-S5)



(a)  $x y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$



(b)  $x z$  平面 :  $y = 2.5(\text{mm})$



(c)  $y z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

図5.2.14  $\theta'$  の等値線図 (RUN-S5)

$$\overline{\theta'^2} = (\overline{\theta'^2})^{1/2} / (T_1 - T_2) \quad \text{--- (5.2.29-a)}$$

$$E^* = E / \Delta u^2 \quad \text{--- (5.2.29-b)}$$

$\overline{\theta'^2}$ および $E^*$ の等値線の間隔はそれぞれ0.02および0.01である。 $E^*$ の分布は上流側とせん断領域で大きな値を示している。また $\overline{\theta'^2}$ は、せん断領域に比較的大きな値を有する形になっている。

### (3) 液体金属ナトリウムの成層流の解析結果との比較

図5.2.15と図5.2.16に、液体金属ナトリウムの成層流(RUN-S5S)の数値解析により得られた $\overline{\theta'^2}$ の等値線と流速ベクトルの分布と $u^*$ の等流速線の分布をそれぞれ示した。図5.2.15に示される等値線の分布は、図5.2.9のものと比較して鉛直方向に大きく広がったものとなっている。一方、図5.2.16に示される等流速線の分布は、図5.2.10と類似したものとなった。

図5.2.17と図5.2.18に、それぞれ鉛直方向(y方向)と水路横断方向(z方向)の流速 $v^*$ 、 $w^*$ の等流速線の分布を示した。これらの結果は、水の成層流(RUN-S5)の解析結果と比較して大きな相違はないものとなっている。

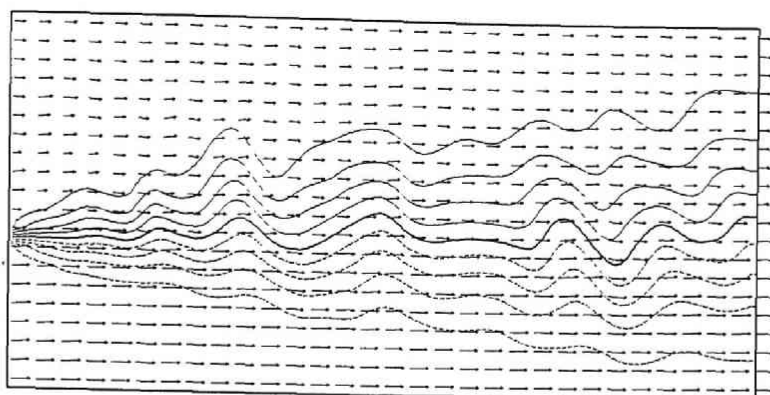
図5.2.19と図5.2.20には、液体金属ナトリウムの成層流の解析から得られたサブグリッドスケールの乱れの運動エネルギー $E^*$ とサブグリッドスケールの温度変動強度 $\overline{\theta'^2}$ の等値線の分布を示した。 $E^*$ の分布は図5.2.13に示された結果と似た形となっているが、 $\overline{\theta'^2}$ の分布は図5.2.14の水成層流のものとは異なり、その値が小さくなっている。これは、液体金属ナトリウムでは表5.2.4に示されるように熱拡散係数が大きく、サブグリッドスケールの温度変動量の散逸率が大きくなっているためであると考えられる。

以上の解析結果は計算開始から12.5秒後における瞬時的な諸量の分布を示したものであったが、ラージエディシミュレーションにより得られる各時刻の計算結果を用いて、乱流量の平均値や分散値などの統計量を得ることができる。図5.2.21はRUN-S5の $x = 500(\text{mm})$ における鉛直方向の統計量について、解析結果と実験結果を比較したものである。図中で、 $L$ は鉛直方向の解析対象領域の長さ(100mm)であり、 $U^*$ と $\Theta^*$ はそれぞれ次式で表される無次元の流速と温度である。

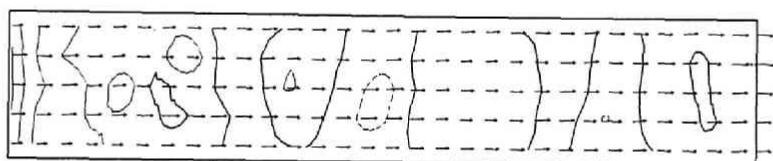
$$U^* = (\overline{U} - U_1) / (U_2 - U_1) \quad \text{--- (5.2.30-a)}$$

$$\Theta^* = (\overline{\Theta} - T_2) / (T_1 - T_2) \quad \text{--- (5.2.30-b)}$$

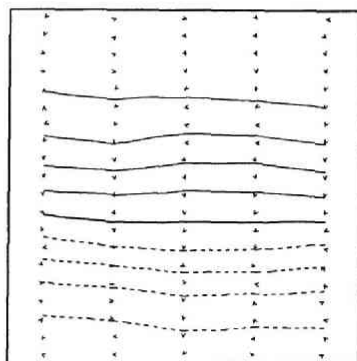
$\overline{U}$ 、 $\overline{\Theta}$ そして $\overline{\theta'^2}$ はそれぞれ時間平均した流下方向流速と温度、そして温度変動の分散値を表す。図5.2.21(a)では実験結果と解析結果は概ね一致するが、図5.2.21(b)では、温度の鉛直方向の拡散幅がやや小さく計算されている。図5.2.21(c)は、温度変動強度の分布を示すものである。この分布のピーク値は解析結果と実験結果でほぼ一致しているが、温度の拡散幅が小さいことも関係して、温度変動強度の上下の分布幅が実験結果よりやや小



(a)  $x y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$   $\overline{25.}(\text{cm/s})$

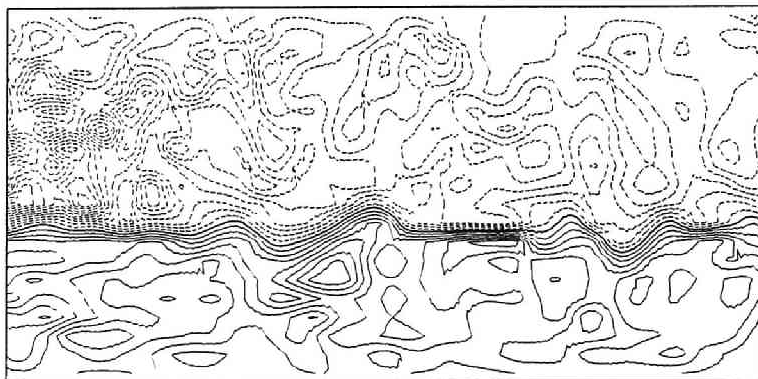


(b)  $x z$  平面 :  $y = 2.5(\text{mm})$

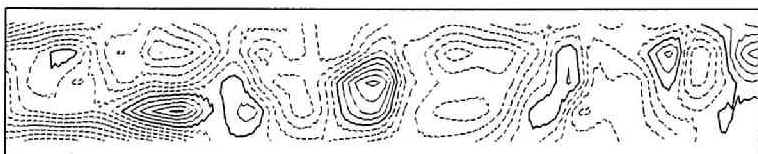


(c)  $y z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

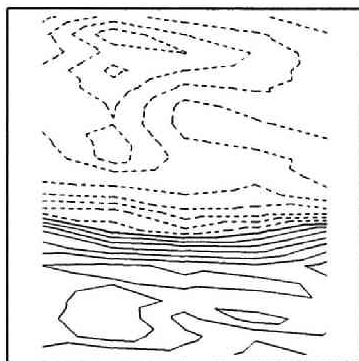
図5.2.15 等温線と流速ベクトルの分布 (RUN-S5S)



(a)  $x-y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$

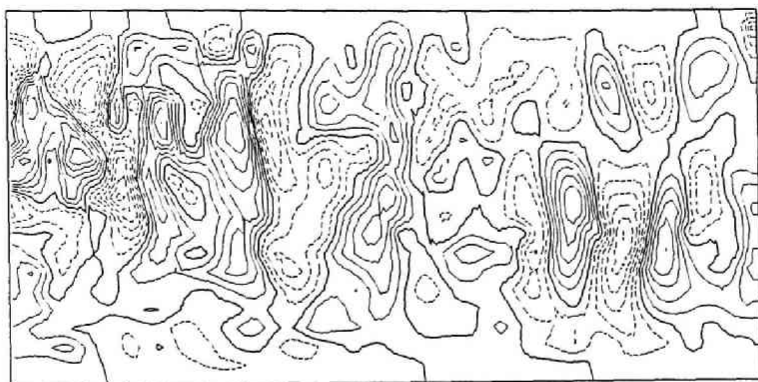


(b)  $x-z$  平面 :  $y = 2.5(\text{mm})$

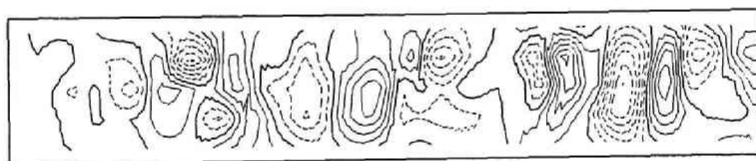


(c)  $y-z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

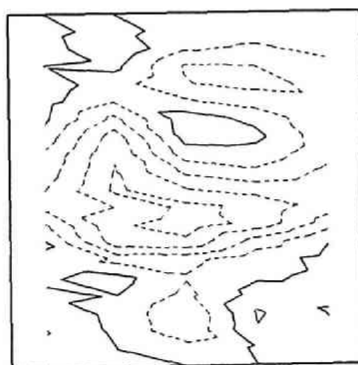
図5.2.16  $\overline{u^*}$  の等流速線図 (RUN-S5S)



(a)  $x y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$



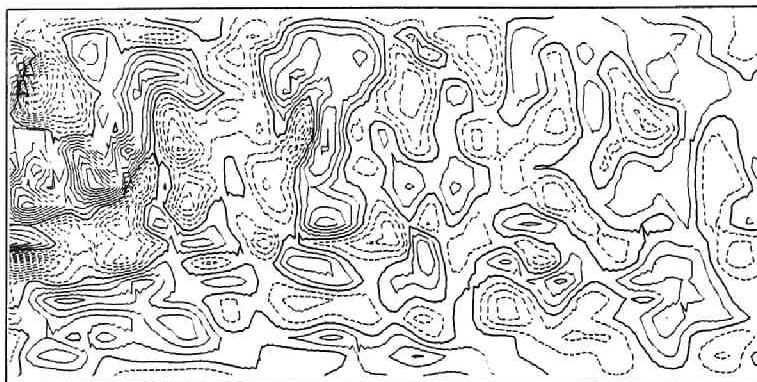
(b)  $x z$  平面 :  $y = 0(\text{mm})$



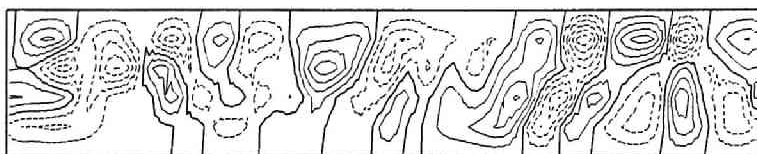
(c)  $y z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

図5.2.17  $\overline{v^*}$  の等流速線図 (RUN-S5S)

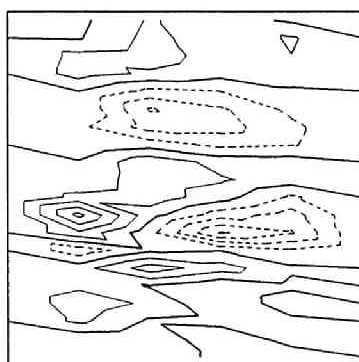




(a)  $x-y$  平面 :  $z=20(\text{mm})$

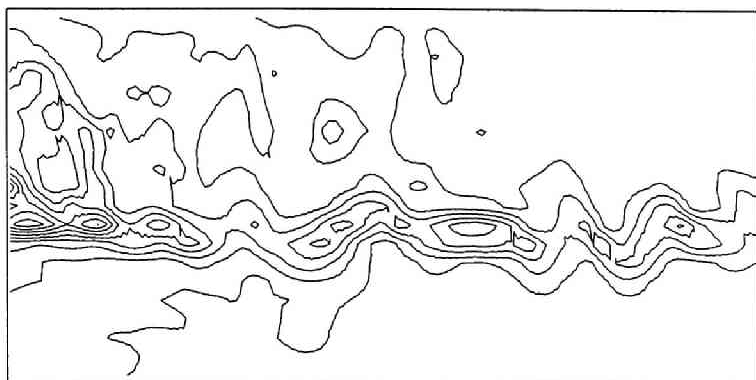


(b)  $x-z$  平面 :  $y=2.5(\text{mm})$

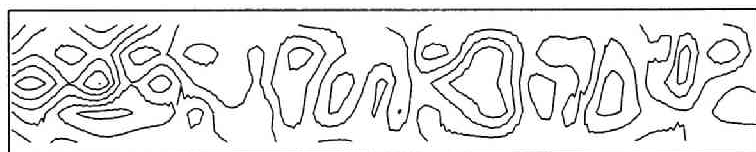


(c)  $y-z$  平面 :  $x=500(\text{mm})$

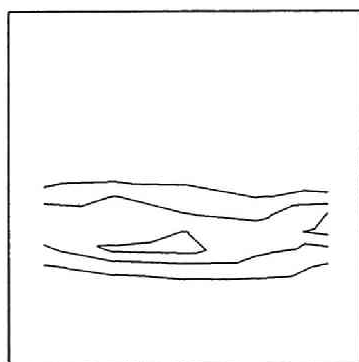
図5.2.18  $\overline{w^*}$  の等流速線図 (RUN-S5S)



(a)  $x\ y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$

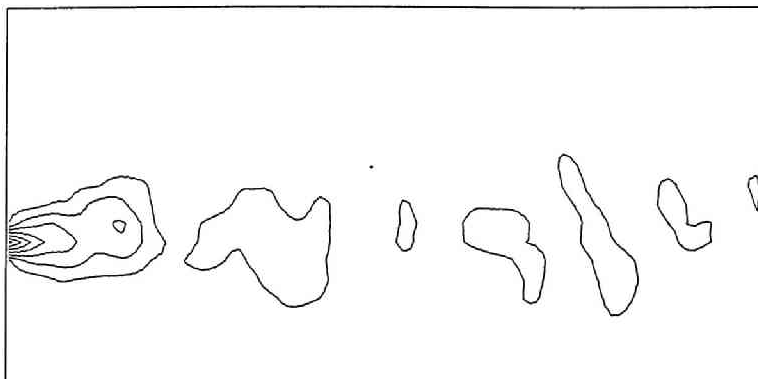


(b)  $x\ z$  平面 :  $y = 2.5(\text{mm})$

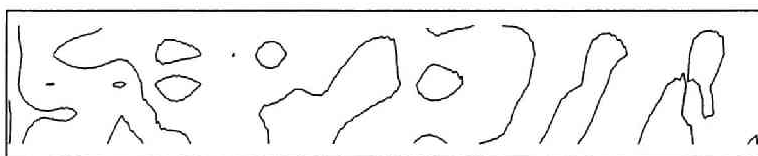


(c)  $y\ z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

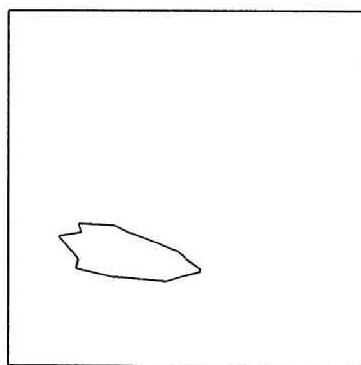
図5.2.19  $E^*$  の等値線図 (RUN-S5S)



(a)  $x y$  平面 :  $z = 25(\text{mm})$

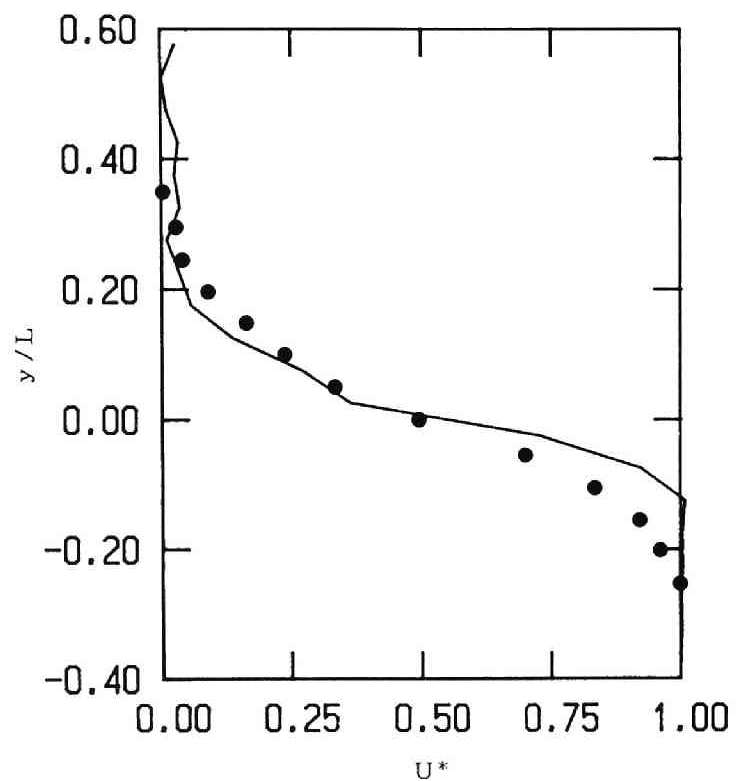


(b)  $x z$  平面 :  $y = 2.5(\text{mm})$

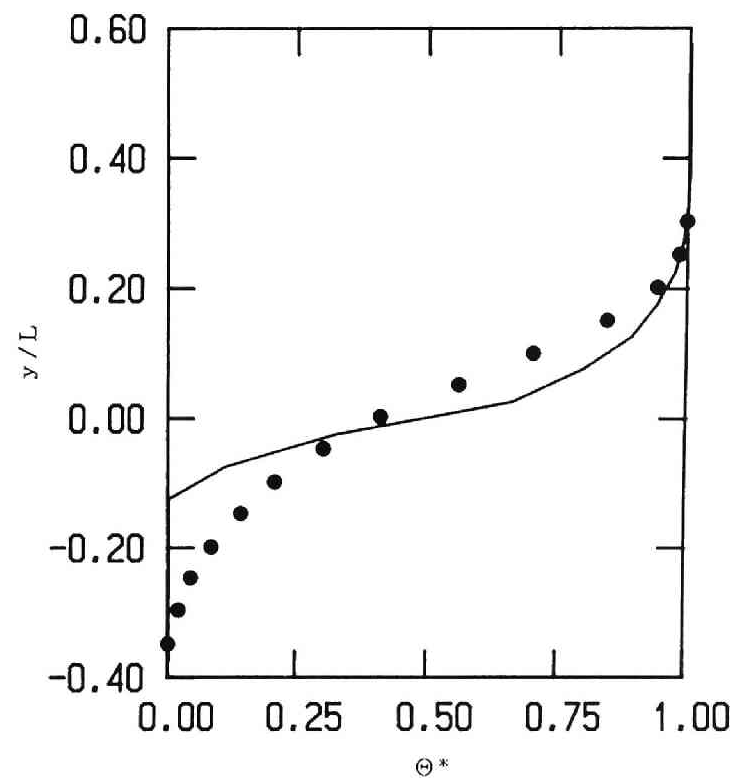


(c)  $y z$  平面 :  $x = 500(\text{mm})$

図5.2.20  $\theta'$  の等値線図 (RUN-S5S)

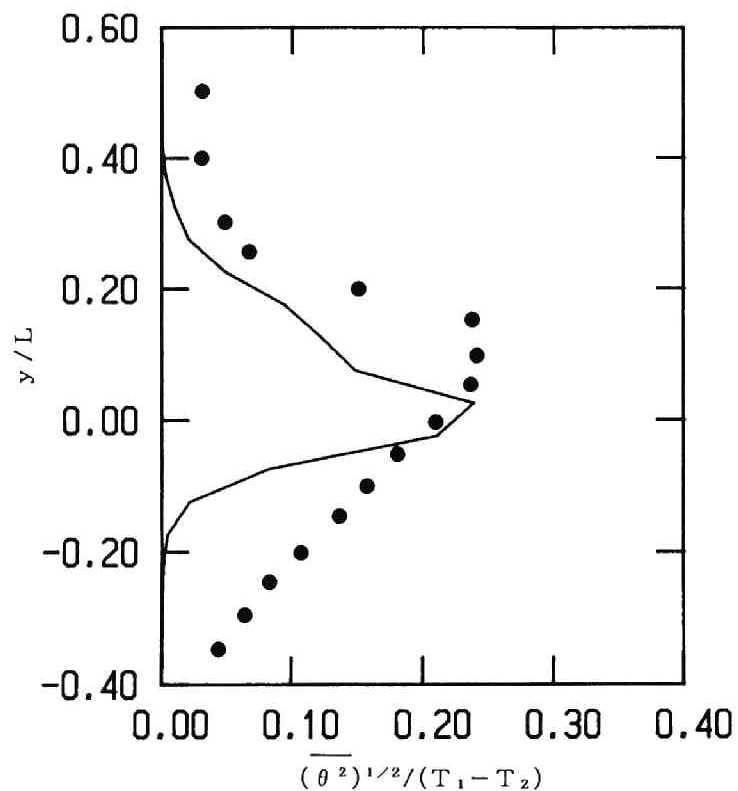


(a) 流速分布 :  $x = 500(\text{mm})$ ,  $z = 25(\text{mm})$



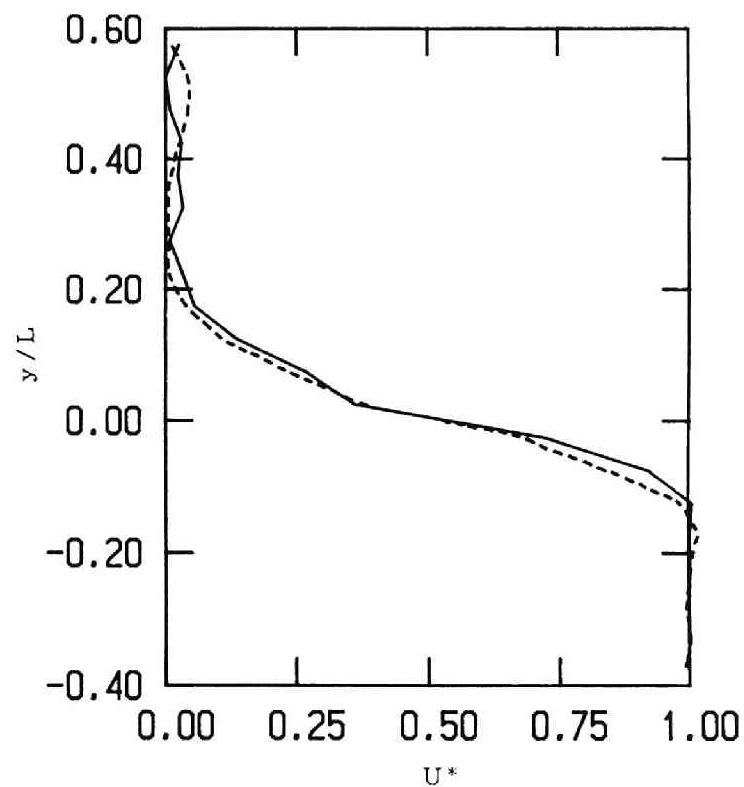
(b) 温度分布 :  $x = 500(\text{mm})$ ,  $z = 25(\text{mm})$

図5.2.21 統計量の分布 (RUN-S5, 一解析結果, ●実験結果)



(c) 温度変動強度の分布:  $x=500(\text{mm})$ ,  $z=25(\text{mm})$

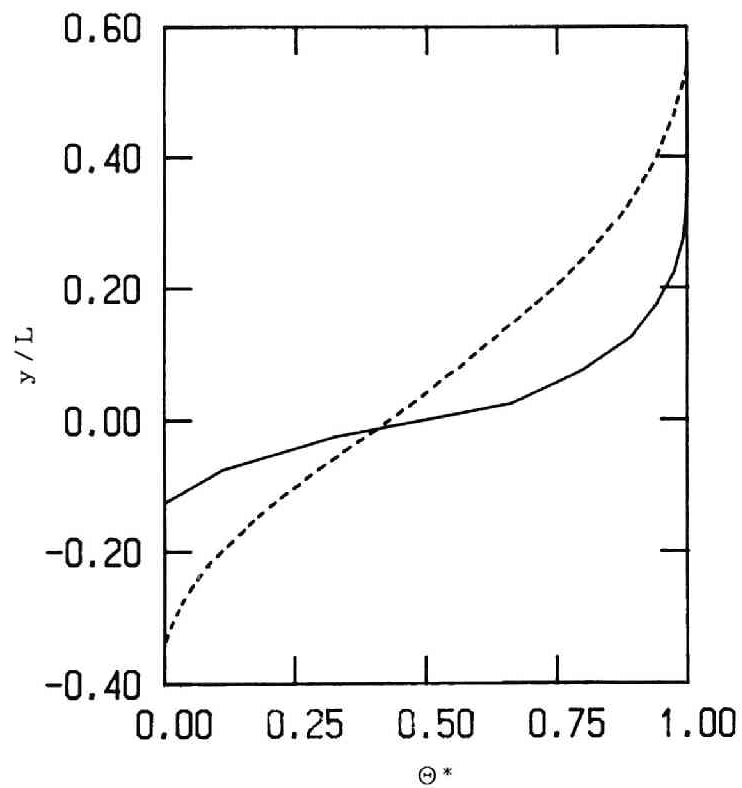
図5.2.21 統計量の分布 (RUN-S5, —解析結果, ●実験結果)



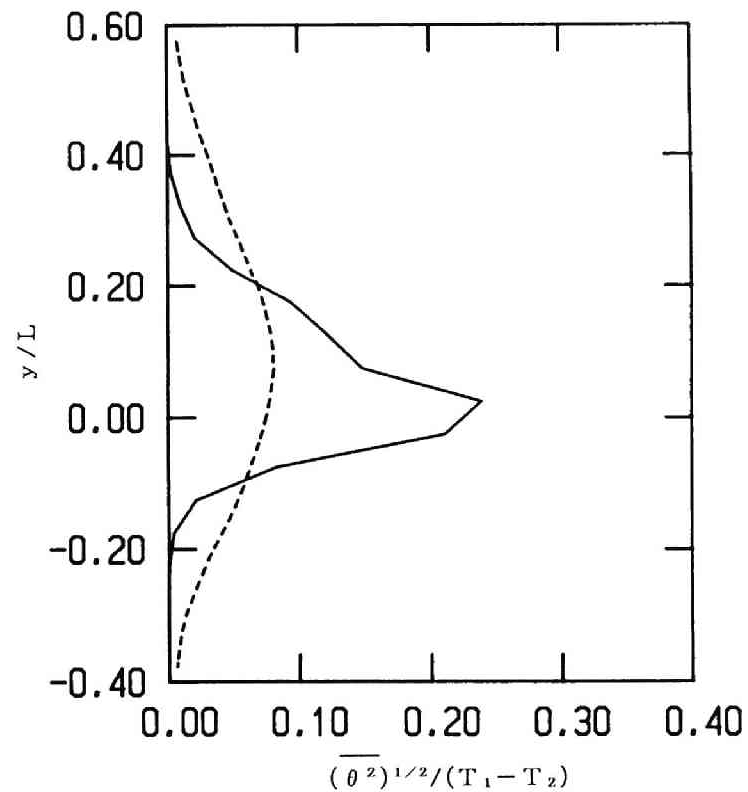
(a) 流速分布:  $x=500(\text{mm})$ ,  $z=25(\text{mm})$

図5.2.22 統計量の分布 (—RUN-S5, ---RUN-S5S)

さいものとなった。図5.2.22は、RUN-S5とRUN-S5Sの統計量の分布を比較したものである。図5.2.22(a)に示される流速分布では、両者はよく似た形であるが、表5.2.4に示された熱拡散係数の相違の影響等により、図5.2.22(b)に示される温度分布は大きく異なり、RUN-S5Sの温度分布は鉛直方向により大きく拡散した形となっている。また、図5.2.22(c)に示される無次元の温度変動強度に関しては、RUN-S5Sではピーク値は低く、また分布幅は上下に広がったものとなっている。



(b) 温度分布 :  $x = 500(\text{mm})$ ,  $z = 25(\text{mm})$



(c) 温度変動強度の分布 :  $x = 500(\text{mm})$ ,  $z = 25(\text{mm})$

図5.2.22 統計量の分布 (—RUN-S5, …RUN-S5S)

### 5.3 開水路の断熱側壁面近傍の成層流の数値解析

#### 5.3.1 壁面近傍の乱流モデル

構造物壁面近傍では流体の粘性の効果が卓越してくるため、乱れ場の特性が、壁面から離れた十分に乱れの強い場におけるものとは異なったものとなる。乱流モデルは、Rodi<sup>15)</sup>が示すように、もともとは十分乱れの強い高レイノルズ数の乱流場を対象として導出されたものである。壁面近傍の流れに対しては、そのままの形では適用できない。このため、Launderら<sup>16)</sup>が行ったように、壁面近傍で壁関数(wall function)と呼ばれる経験式を用いる方法が広くとられていた。しかしながら、その後、壁関数の一般性に対する問題点が指摘され、Jonesら<sup>17), 18)</sup>やHanjalicら<sup>19)</sup>のように、壁面近傍の乱流構造に関する粘性の効果をより正確にモデル化しようとする研究がなされるようになった。近年になって、このような壁面近傍に適用可能な乱流モデルは数多く提案されたが<sup>20)</sup>、特にLamら<sup>21)</sup>は、乱流量の輸送方程式に付加的な項を含まない形のモデルを提案している。このような乱流モデルは、主として等温な流れ場を対象とするものであったが、ここでは第3章で得られた結果を用いて、非等温な流れ場における壁面近傍の温度変動量のモデル方程式について検討を行う。

壁面近傍では粘性の効果が支配的となるため、第3章で用いた次式で示される乱流レイノルズ数 $R_T$ や乱流ペクレ数 $P_T$ が低下する。

$$R_T = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad \text{--- (5.3.1)}$$

$$P_T = \frac{\overline{k \theta^2}}{\alpha \varepsilon \theta} \quad \text{--- (5.3.2)}$$

Launder<sup>12)</sup>によって提案された関係式を用いると、温度変動量の散逸率 $\varepsilon$ は次式のように表される。

$$\varepsilon \theta = \frac{2}{c_T'} \frac{\overline{\varepsilon \theta^2}}{k} \quad \text{--- (5.3.3)}$$

ここで、第3章の結果を用いると、 $c_T'$ は(3.2.67)式と(3.2.68)式、あるいは(3.2.74)式と(3.2.75)式により表される。ここでは、解析上取扱いやすい後者の関係式を用いる。すなわち、

$$\frac{1}{c_T'} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{b_1}{a_1 + a_2 C_L Pr R_T \lambda \bar{\theta}^2} + b_2 \left( \frac{\lambda C_L R_T}{a_1 + a_2 C_L R_T} \right)^{2/3} \right\} \quad \text{--- (5.3.4)}$$

$$\lambda^2 = 16 Pr \frac{a_1 + a_2 C_L R_T}{a_1 + 16 a_2 C_L Pr R_T \lambda \bar{\theta}^2} \quad \text{--- (5.3.5)}$$

上式より、 $c_T'$ はプラントル数 $Pr$ と(5.3.1)式で定義される乱流レイノルズ数の関数となる。



Lamら<sup>21)</sup>により提案された乱流モデルに以上の関係式を用いると、次のような基礎方程式が得られる。

①連続式および運動方程式

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{--- (5.3.6)}$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right) \quad \text{--- (5.3.7)}$$

②エネルギー方程式

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \alpha \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} - \overline{u_i \theta} \right) \quad \text{--- (5.3.8)}$$

③乱れの運動エネルギー  $k$  の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = & -\beta \overline{u_i \theta} F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_M}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right\} \\ & - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \end{aligned} \quad \text{--- (5.3.9)}$$

④エネルギー散逸率  $\varepsilon$  の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_M}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\} \\ & - C_1 f_1 \overline{u_i u_j} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad \text{--- (5.3.10)}$$

⑤温度変動量  $\theta^2$  の方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial x_j} = & -2 \overline{u_i \theta} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( C_{T1} f_T \frac{k^2}{\varepsilon} + \alpha \right) \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial x_j} \right\} - \varepsilon_\theta \end{aligned} \quad \text{--- (5.3.11)}$$

上式中のレイノルズ応力および乱流熱フラックスは次式で表される。

$$-\overline{u_i u_j} = \varepsilon_M \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad \text{--- (5.3.12)}$$

$$-\overline{u_i \theta} = \varepsilon_H \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_i} \quad \text{--- (5.3.13)}$$

渦動粘性係数  $\varepsilon_M$  は、次のように表される。

$$\varepsilon_M = C_\mu f_\mu f_b \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{--- (5.3.14)}$$

ここで、 $f_\mu$  は  $\text{Lam}$  によれば、次式で表される。

$$f_\mu = E^2 \left( 1 + \frac{20.5}{R_\tau} \right) \quad \text{--- (5.3.15)}$$

ここに、

$$E = 1 - \exp(-A_k R_k) \quad \text{--- (5.3.16-a)}$$

$$R_k = \frac{k^{1/2} z}{\nu} \quad \text{--- (5.3.16-b)}$$

である。 $f_b$  は、第2章の結果を用いれば、次式で表される。

$$f_b = \frac{1}{1 + 0.2B} \quad \text{--- (5.3.17)}$$

$B$  は、 $\text{Launder}^{12)}$  により提案された成層度の強さを表すパラメータで、(2.2.22)式で定義されるものである。(5.3.13)式中の乱流熱拡散係数  $\varepsilon_H$  は、第2章の結果を用いて次式で表される。

$$\varepsilon_H = \frac{1.6}{1 + 0.24B} \varepsilon_M \quad \text{--- (5.3.18)}$$

また、(5.3.11)式中の  $\varepsilon_\theta$  は(5.3.3)、(5.3.4)および(5.3.5)式で表される。さらに、(5.3.10)式および(5.3.11)式中では、次のような関係式が用いられている。

$$f_1 = 1 + \left( \frac{A_{c1}}{f_\mu} \right)^3 \quad \text{--- (5.3.19)}$$

$$f_2 = 1 - \exp(-R_\tau^2) \quad \text{--- (5.3.20)}$$

$$f_\tau = \frac{1}{1 + 0.16B^2} \quad \text{--- (5.3.21)}$$

以上の方程式中の係数値は表5.3.1に示すとおりである。

表5.3.1 係数値

$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_1$	$C_2$	$C_\mu$	$C_{T1}$	$A_k$	$A_{c1}$
1.0	1.3	1.44	1.92	0.09	0.06	0.0165	0.05

第2章の図2.1.2で示される直線開水路内に形成される成層流の側壁面近傍の領域に、上記の解析モデルを適用する。側壁面はアクリルでできており、温度分布の計測の結果、これはほぼ断熱壁であるということを確認している。

$\text{Garreton}^{22)}$  は、壁面近傍の領域に対し、基礎方程式を1次元化したモデルにより解析を行い、これを壁面から離れた領域を解析する2次元計算と組み合わせるという手法を

用いた。ここでもこれと同様の考え方から、壁面から離れた成層流の主流に対する3次元計算を、側壁面近傍を対象とする2次元計算と組み合わせて行うという方法をとった。壁面近傍を対象とする2次元モデルの基礎方程式は、以下のように表される。

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( \varepsilon_M + \nu \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \varepsilon_M + \nu \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right\} \quad \text{---(5.3.22)}$$

$$0 = P_{k2} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_M}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_M}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right\} \\ - \varepsilon + \beta g \bar{v} \theta \quad \text{---(5.3.23)}$$

$$0 = C_1 \frac{\varepsilon}{k} (f_1 P_{k2} - \frac{C_2}{C_1} f_2 \varepsilon) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_M}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\varepsilon_M}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right\} \quad \text{---(5.3.24)}$$

$$0 = -2 \frac{\bar{v} \theta}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( C_{r1} f_T \frac{k^2}{\varepsilon} + \alpha \right) \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial y} \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( C_{r1} f_T \frac{k^2}{\varepsilon} + \alpha \right) \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial z} \right\} - \varepsilon_\theta \quad \text{---(5.3.25)}$$

ここで、 $P_{k2}$ は以下のように表される。

$$P_{k2} = -\bar{u} \bar{v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \bar{u} \bar{w} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \quad \text{---(5.3.26)}$$

座標系と数値解析の対象とする領域を図5.3.1に示す。2次元モデルの適用範囲は側壁面から  $z/L=0.1$  までの領域である。ここに  $L$  は水路幅 (0.2m) である。側壁面近くでの境界条件は以下のようにした。

$$\bar{U} \Big|_{z=0} = k \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{---(5.3.27-a)}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \bar{\theta}^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad \text{---(5.3.27-b)}$$

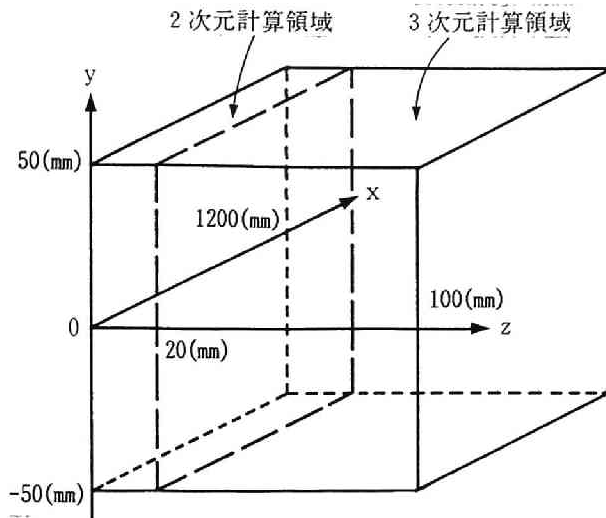


図5.3.1 計算領域

### 5.3.2 解析結果と実験結果

図5.3.2に  $y = 0(\text{mm})$  における  $z$  方向の  $U$  の分布を示す。図中でサフィックス  $b$  は  $z/L = 0.1$  における値を意味する。解析により得られた  $U$  の分布結果は実験結果よりやや低い値となった。図5.3.3は、乱れエネルギーの分布を示すものである。実験結果に見られるように、乱れエネルギーは主流から側壁面に向かうにつれて増加し、 $z/L \cong 0.02$  で極大値をとった後、壁面近傍で急速に減少する傾向を示す。この傾向は、数値解析結果にも見られ、実験結果とほぼ一致するものとなっている。図5.3.4は温度変動強度の  $z$  方向の分布を示すものである。図中の破線Bは、温度変動量の散逸率に対して次式で示される既往の関係式を用いて得られた結果である。

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{2}{1.6} \frac{\overline{\varepsilon} \theta^2}{k} \quad \text{---(5.3.28)}$$

一方、図中の実線Aおよび破線A'は、前述の(5.3.4)および(5.3.5)式を用いて得られた結果で、実線Aのものはこれらの式中の係数  $a_1, a_2, b_1$  および  $b_2$  に対して(3.2.77)の値を用いたものである。また、破線A'は  $a_2$  に対して0.1なる値を用いた場合の結果であり、解がやや実験結果に近いものとなっている。この結果に示されるように、温度変動量の散逸率に対して乱流レイノルズ数等の影響を考慮することにより、温度変動量に対する数値解析結果が改善されることが明らかとなった。

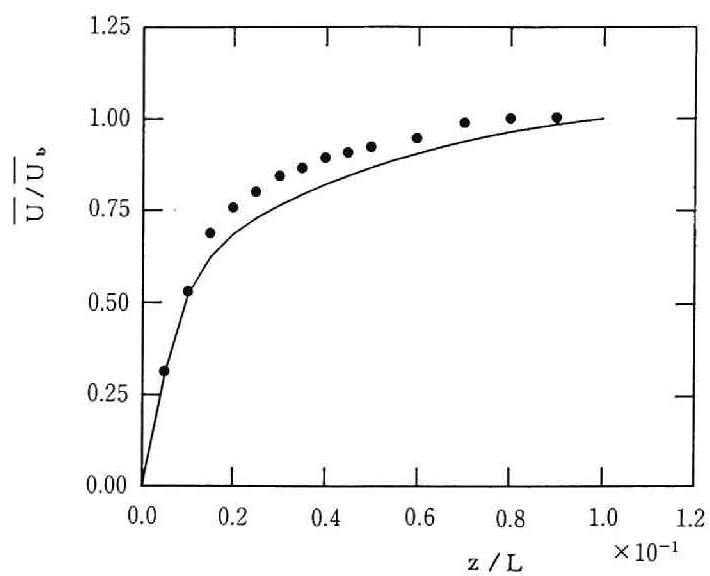


図5.3.2 流速分布  
 $(x = 1.0(\text{m}), y = 0.0(\text{mm}))$

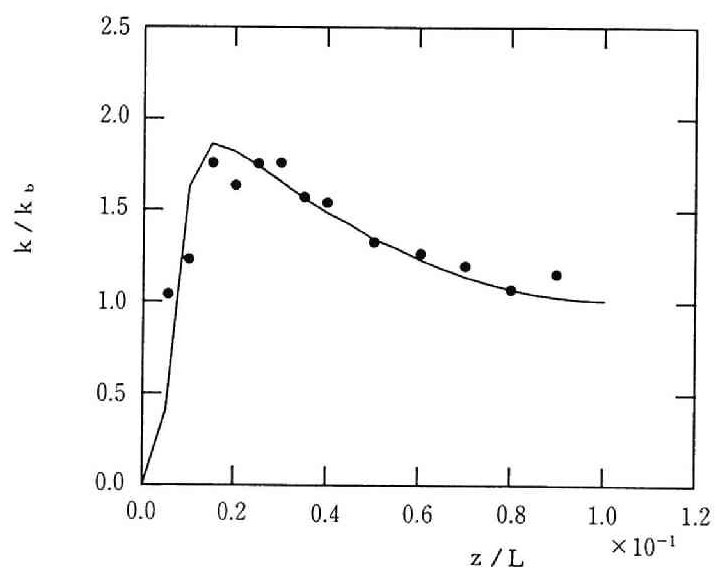


図5.3.3 乱れエネルギーの分布  
 $(x = 1.0(\text{m}), y = 0.0(\text{mm}))$

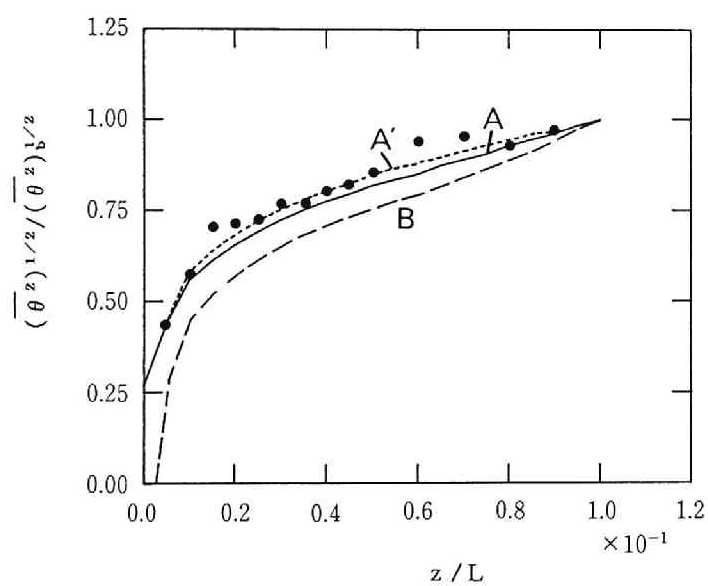


図5.3.4 温度変動強度の分布  
 (  $x = 1.0(\text{m})$ ,  $y = 0.0(\text{mm})$  )

## 5.4 円筒容器内の成層化現象の数値解析

### 5.4.1 水実験による成層化現象の数値解析

第1章で述べたように、高速増殖炉における温度成層化現象は、原子炉の構造健全性に係わる熱流動現象であり、このため高速増殖炉の上部炉容器を簡単に模擬する軸対称の円筒容器を用いた温度成層化現象に対する基礎実験が行われた<sup>23)</sup>。ここでは、第2章において導かれた乱流拡散係数に対する浮力効果を考慮した乱流モデルを用いて、試験流体として水を用いた成層化現象の数値解析を行う。

#### (1) 実験の概要

図5.4.1に実験装置の全体図を示した。実験装置のフローシステムは、冷・温水系のループから構成されており、円筒容器内に冷・温水を供給して、容器内に定常状態と熱過渡状態をつくり出すことができる。定常状態においては、温度と流量が一定な高温水が容器内へ供給される。一方、熱過渡状態では、円筒容器内へ供給される水の流量を一定としたまま、その温度を低下させる。このため、容器内に成層化現象が生ずる。

図5.4.2に円筒容器を示した。円筒容器の直径は600mmで、実験中の水位は約525mmである。容器底面の中央には直径70mmの水の流入口があり、その入口直上には原子炉上部構造物(UIS)に相当する直径70mmの円筒が設置されている。円筒容器底面からUIS下面までの高さHは10～100mmの範囲で変化させることが可能である。入口から上方に噴出した水は、UISの下面に衝突した後、容器内へ流れてゆくが、容器内には後述するようにこのUIS下面の高さHに応じたフローパターンが現れる。また、円筒容器の側面には幅20mmの円周状の出口スリットがあり、容器内の水はここから外部へ流出してゆく。図5.4.3には、座標系および実験結果と解析結果とを比較する点(P1～P5)の位置を示した。

熱過渡状態の温度計測は、r-z平面内に適当な配置で備え付けられた約40本のサーミスタにより行われた。

数値解析の対象とした成層化実験の実験条件を表5.4.1に示した。

表5.4.1 実験条件

RUN-NO.	H(mm)	T <sub>e</sub> (℃)	T <sub>h</sub> (℃)	Q(ℓ/m)	$\overline{Ri}$ (-)	Re(-)
RUN-1	10	9.7	60.7	64.5	0.14	15200
RUN-2	60	11.5	41.5	65.3	0.063	15400

表5.4.1中で、Hは容器底面からUIS下面までの高さ、T<sub>h</sub>とT<sub>e</sub>はそれぞれ熱過渡開始前後に容器内へ流入する水の温度、Qは流入水の流量であり、バルクリチャードソン数 $\overline{Ri}$ とレイノルズ数Reはそれぞれ次式で定義されるものである。

$$\overline{Ri} = \beta g D (T_h - T_e) / U_o^2 \quad \text{---(5.4.1)}$$

$$Re = U_o D / \nu_e \quad \text{---(5.4.2)}$$

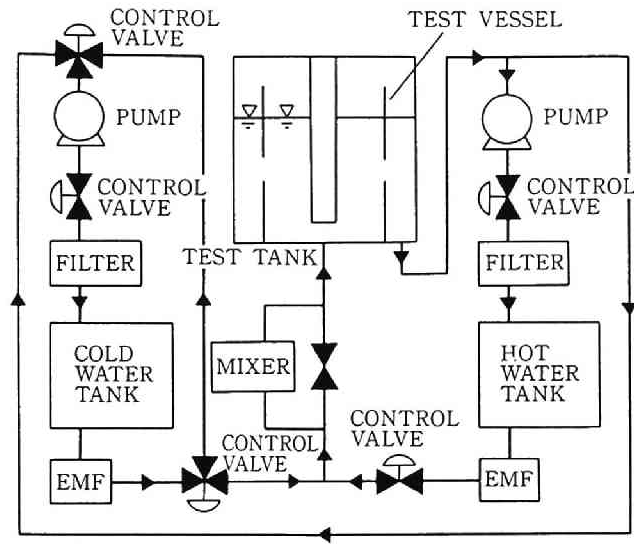


図5.4.1 実験装置の全体図

ここに、 $D$ は入口直径(70mm)、 $U_0$ は流入水の入口部分における断面平均流速、 $\nu_0$ は温度  $T_0$ における動粘性係数である。

## (2)解析モデル

解析モデルは第2章で導かれた浮力効果を乱流拡散係数に対して考慮した  $k-\varepsilon$  モデルである。渦動粘性係数と乱流プラントル数は次式で与えられる。

$$\varepsilon_m = \frac{C_p}{1 + 0.2B} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{--- (5.4.3)}$$

$$\frac{1}{Pr_t} = \frac{1.6}{1 + 0.24B} \quad \text{--- (5.4.4)}$$

ここで  $B$  は Launder<sup>12)</sup>により提案された成層度の強さを表す無次元パラメータで、(2.2.22)式で表される。すなわち、

$$B = \beta_g \left( \frac{k}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z} \quad \text{--- (5.4.5)}$$

ここに、 $z$ は鉛直上方に向かう座標成分である。



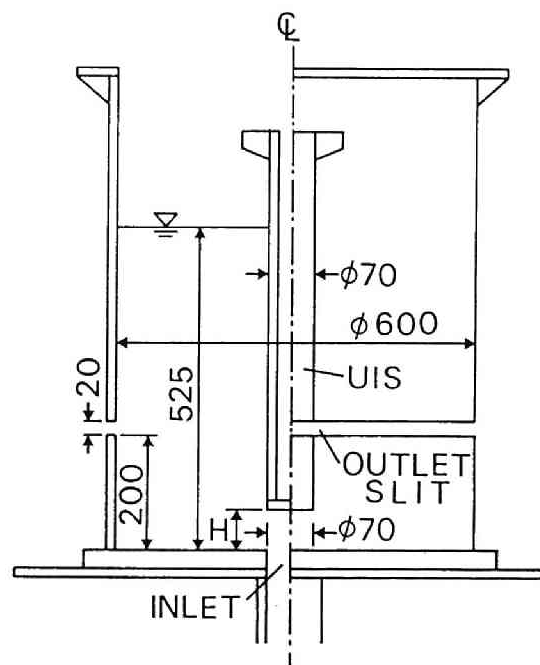


図5.4.2 円筒容器の形状

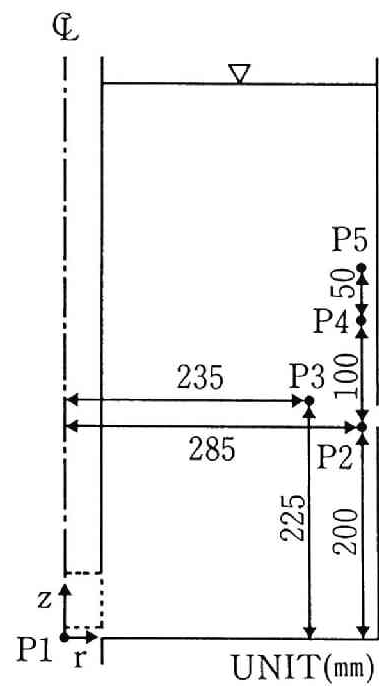


図5.4.3 座標系と点P1～P5の分布

円筒座標系における  $k - \varepsilon$  モデルの基礎方程式は、4.1で述べたものと同様の方法で導くことができる。数値解析は、 $r - z$  2次元平面内で行われる。この2次元場における基礎方程式は、3次元の円筒座標系の基礎方程式に次の条件を適用することにより得られるものである。

$$\overline{v_\phi} = 0 \quad \text{--- (5.4.6)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\overline{\dots}) = 0 \quad \text{--- (5.4.7)}$$

基礎方程式を以下に示す。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{V_r}) + \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial z} = 0 \quad \text{--- (5.4.8)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial r} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial z} = \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \overline{V_r}}{\partial z^2} - \frac{\overline{V_r}}{r^2} \right\} \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} - \left( \frac{\partial}{\partial r} \overline{v_r v_r} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v_r v_z} + \frac{1}{r} \overline{v_r v_r} - \frac{1}{r} \overline{v_\phi v_\phi} \right) \end{aligned} \quad \text{--- (5.4.9)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial r} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial z} = - \{ 1 - \beta (\overline{\Theta} - \Theta_s) \} g \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \overline{V_z}}{\partial z^2} \right\} \\ - \left( \frac{\partial}{\partial r} \overline{v_r v_z} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v_z v_z} + \frac{1}{r} \overline{v_r v_z} \right) \end{aligned} \quad \text{--- (5.4.10)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial r} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z} = \alpha \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \overline{\Theta}}{\partial z^2} \right\} \\ - \left( \frac{\partial}{\partial r} \overline{v_r \theta} + \frac{1}{r} \overline{v_r \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v_z \theta} \right) \end{aligned} \quad \text{--- (5.4.11)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{k}}{\partial r} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{k}}{\partial z} = P_k + C_k \left\{ \frac{\partial \overline{k}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\overline{k^2}}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial \overline{k}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{k^2}}{\varepsilon} \right) \right\} \\ + \left( C_k \frac{\overline{k^2}}{\varepsilon} + \nu \right) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \overline{k}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \overline{k}}{\partial z^2} \right\} - \varepsilon + \beta g \overline{v_z \theta} \end{aligned} \quad \text{--- (5.4.12)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial r} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial z} = C_\varepsilon \frac{\varepsilon}{k} P_k + C_\varepsilon \left\{ \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\overline{k^2}}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\overline{k^2}}{\varepsilon} \right) \right\} \\ + \left( C_\varepsilon \frac{\overline{k^2}}{\varepsilon} + \nu \right) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \overline{\varepsilon}}{\partial z^2} \right\} - C_\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad \text{--- (5.4.13)}$$

ここに  $P_k$  は  $k$  に関する方程式中の  $k$  の生成項であり、次のように表される。

$$P_k = - \left( \overline{v_r v_r} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial r} + \overline{v_r v_z} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial z} + \frac{\overline{V_r}}{r} \overline{v_\phi v_\phi} + \overline{v_r v_z} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial r} + \overline{v_z v_z} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial z} \right) \quad \text{---(5.4.14)}$$

基礎方程式中の係数値は表5.4.2に示されるものを用いた。

表5.4.2 解析モデルの係数値

$C_v$	$C_k$	$C_\epsilon$	$C_{\epsilon_1}$	$C_{\epsilon_2}$
0.09	0.09	0.075	1.44	1.90

### (3)解析結果

図5.4.4と図5.4.5に定常時と熱過渡時における、解析により得られた流速ベクトルと等温線の分布を示す。流速ベクトルは、流入水の入口部における断面平均流速 $U_0$ で無次元化されている。等温線は正規化された温度 $\Theta^*$ に対するもので、 $\Theta^*$ は次式で定義される。

$$\Theta^* = (\Theta - T_c) / (T_h - T_c) \quad \text{---(5.4.15)}$$

等温線の間隔は0.1で、太い線は値が0.5の等温線を表す。また、図中の無次元時間 $t^*$ は次式で与えられる。

$$t^* = t Q / V_0 \quad \text{---(5.4.16)}$$

ここに、 $V_0$ は円筒容器の底面から出口スリット下端までのUISを除いた部分の体積を表す。RUN-1では、UIS高さ $H$ が10mmであるため、定常時には入口部分から噴出した水は、UISに衝突した後、底面に沿って流れ、容器側面に沿って上昇する。このため、容器下部には左回りの1つの大きな循環流が生じている。一方、RUN-2ではUIS高さ $H$ が60mmと比較的高く、入口部分からの噴流は容器内を右斜め上方に向かって流れる。このため、この噴流の上下に互いに逆回りの2つの循環流が生じている。熱過渡時における数値解析結果も、この定常時のフローパターンの相違に見られるようにRUN-1とRUN-2で異なった成層化の過程を示している。

図5.4.6および図5.4.7は実験および数値解析で得られた温度時系列を示すものである。図5.4.6は、図5.4.3に示される点のうちP1、P2およびP3におけるRUN-1の温度時系列を示すものであり、また図5.4.7はP1、P4およびP5におけるRUN-2の結果を示すものである。図5.4.6(a)のRUN-1の実験結果に示されるように、点P3では点P2よりも比較的大きな温度変動が生じているが、図5.4.6(b)の解析結果でも、この傾向が一致するものとなっている。解析結果に生じた温度の変動は、用いている解析モデルが乱流モデルであることから、アンサンブル平均としての温度時系列が有する温度の変動であると考えられる。一方、図5.4.7(a)のRun-2の実験結果では、出口スリットより上方に位置する点P4および点P5で、振幅が大きく周期的な温度変動が生じている。これは、成層界面が定常波に似た状態で周期的に

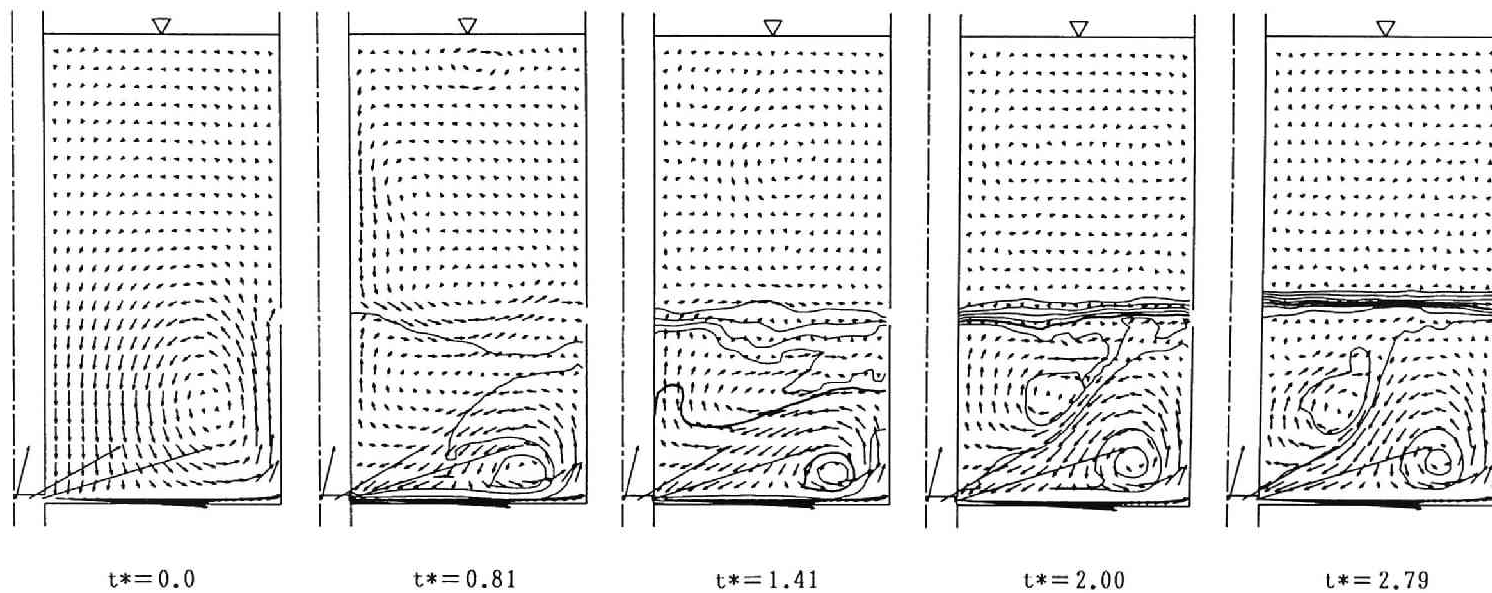


図5.4.4 流速ベクトルと等温線の分布 (RUN-1)

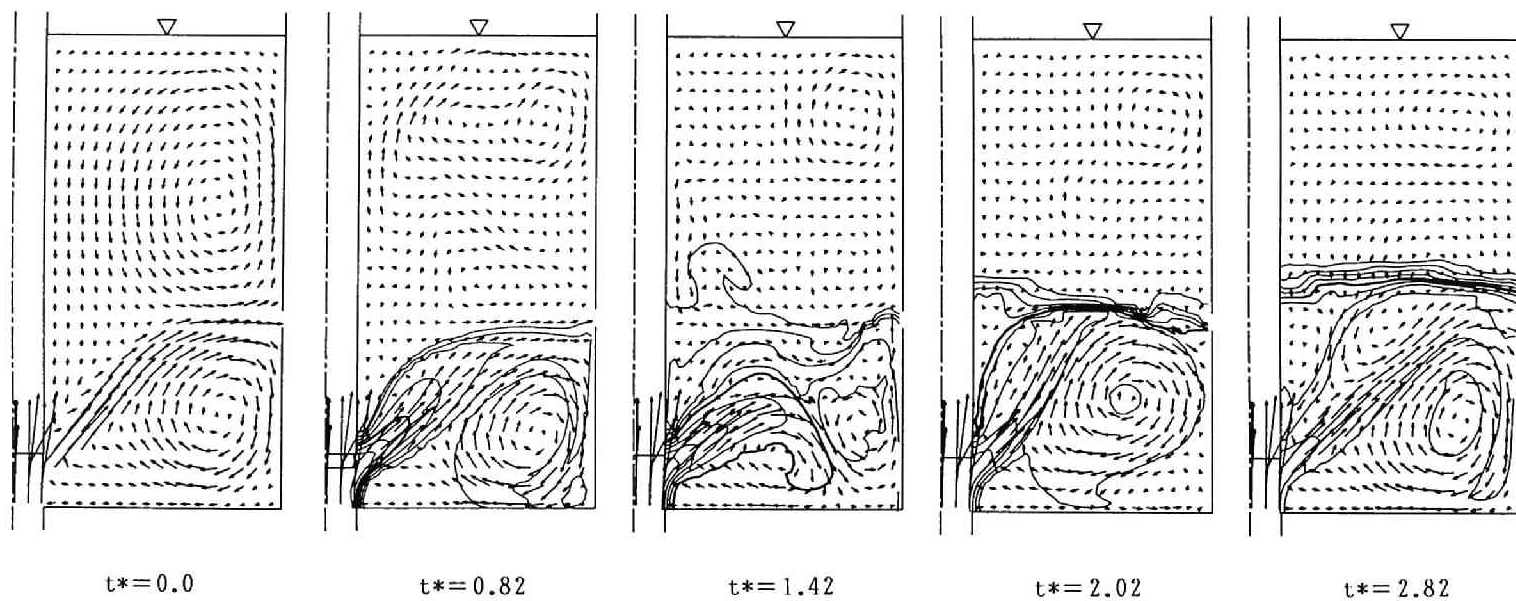
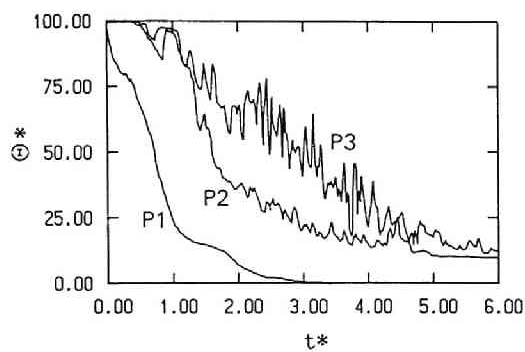
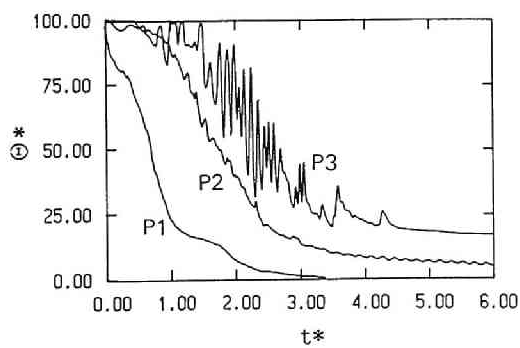


図5.4.5 流速ベクトルと等温線の分布 (RUN-2)

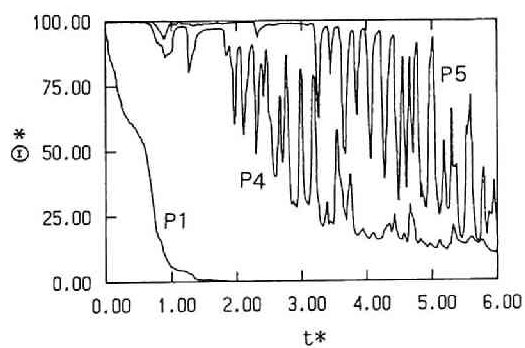


(a)実験結果

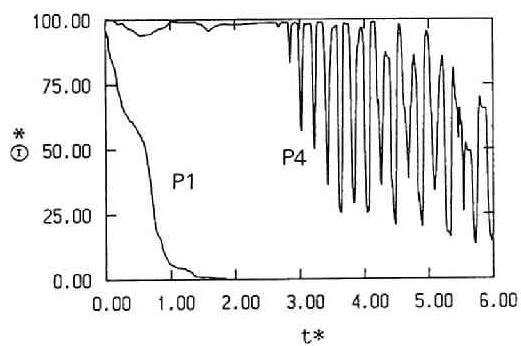


(b)数値解析結果

図5.4.6 温度時系列 (RUN-1)



(a)実験結果



(b)数値解析結果

図5.4.7 温度時系列 (RUN-2)

揺動するために起こるものである<sup>24)</sup>。図5.4.7(b)の解析結果では、成層界面の上昇が遅いため、P4の温度変動が実験結果よりも遅く現れている。これは成層界面が出口スリットの高さ付近で形成された後、さらに上昇してゆく過程において成層界面近傍の局所的な温水の連行の効果が乱流モデルでは十分に評価できないためであると考えられる。しかしながら、実験結果に見られる温度変動は数値解析結果の中にも生じている。図5.4.8は、RUN-2で現れた成層界面が揺動する状態を示したものである。実験結果と解析結果に見られるこの揺動の周期は約10秒で、両者はほぼ一致している。解析結果では、その流速ベクトルの分布に示されるように、右斜め上方に向かう噴流噴出角度とその上下にできる2つの循環流の大きさが、成層界面の傾きと連成しており、このためある時間にわたって持続する周期的な成層界面の揺動が発生している。

#### 5. 4. 2 密度変化の大きい成層化現象の数値解析

大きな密度変化を伴う温度成層化現象の数値シミュレーションを行うための解析モデルとして、4.1ではブシネスク近似を用いずに2方程式乱流モデルの基礎式を導いた。ここでは、この解析モデルを実際の原子炉とほぼ等しいスケールの円筒容器内で生ずる液体金属ナトリウムの温度成層化現象に適用する<sup>25)</sup>。この解析モデルはブシネスク近似を用いずに導かれたことから、運動方程式やエネルギー方程式中の慣性項や乱流量の方程式に対する密度効果がより厳密に考慮された形となっているが、特に連続式(4.1.18)式に着目した場合、これは流体の温度変化に伴う体積変化が考慮されたものとなっている。このため、この解析モデルは、現在高速増殖炉(FBR)で問題となっている温度成層化現象に伴う冷却材の収縮による液位低下現象の数値シミュレーションにも用いることが可能である。このことから、ここでは円筒容器内の温度成層化現象を、流体の液位低下の過程をも同時に合わせて数値的に解析した。

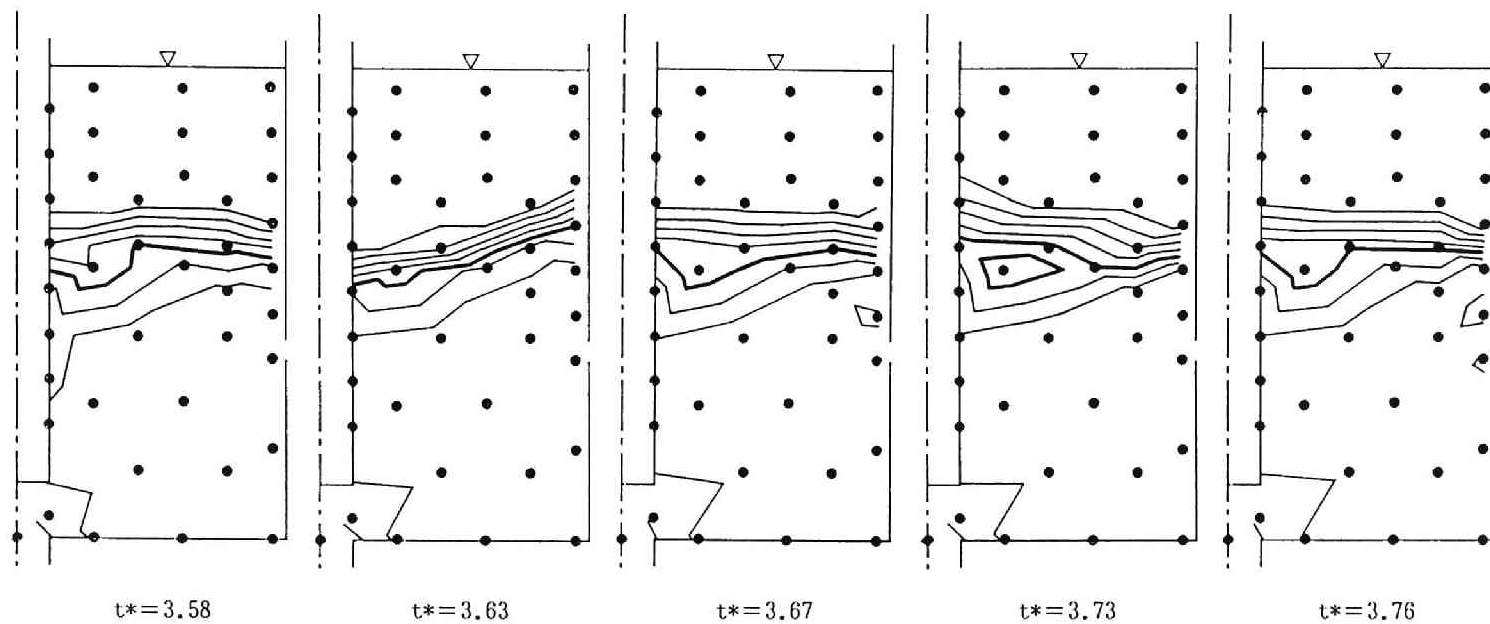
##### (1)解析モデル

ブシネスク近似を用いない解析モデルと既往の解析モデルとの相違や、乱流拡散係数に対する浮力効果等を明らかにするため、ここでは表5.4.3に示されるような4つのモデルを設定した。

表5.4.3 解析モデル

	①ブシネスク近似 の有無	②乱流拡散 係数	③モデルの 係数値	④流出入流体 の境界条件	⑤自由表面の 境界条件
MODEL-1	有	D-1	C-1	VC	RS
MODEL-2	有	D-2	C-1	VC	RS
MODEL-3	無*	D-2	C-2	VC	RS
MODEL-3S	無	D-2	C-2	MC	FS

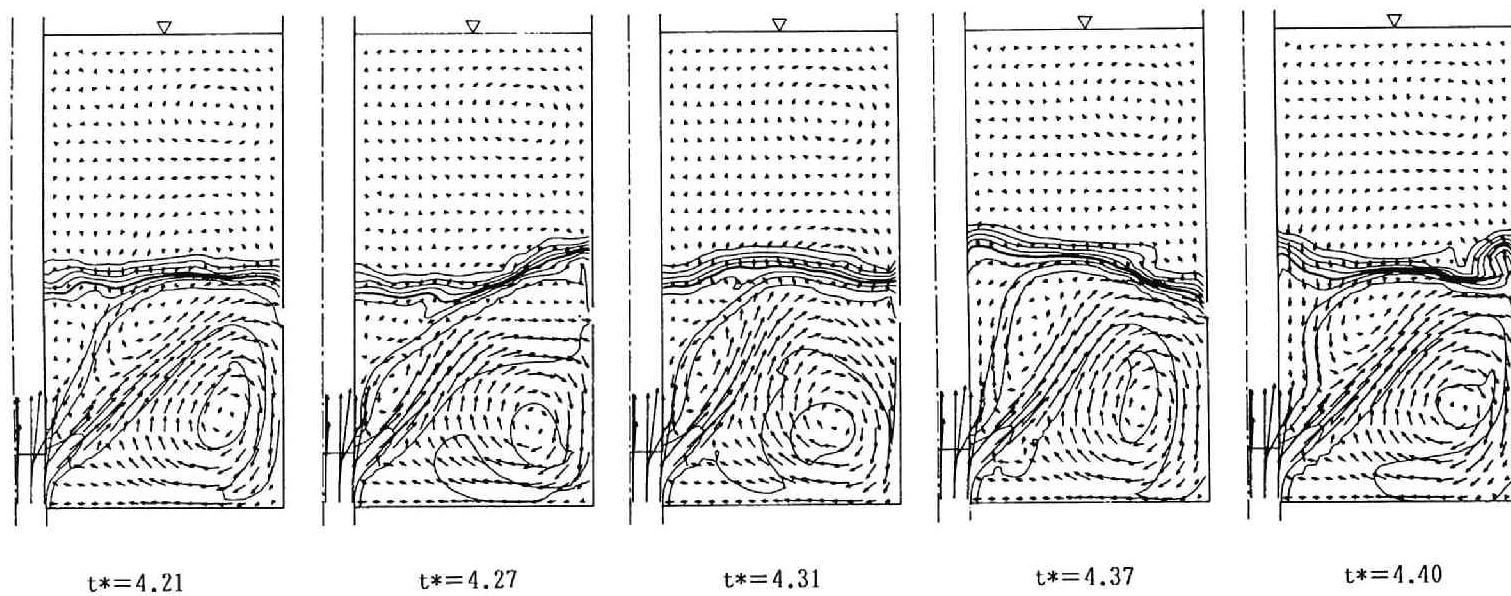
\* 連続式にのみブシネスク近似を用いている。



(a) 実験結果

図5.4.8 温度成層界面の定常波運動 (RUN-2)





(b) 数值解析結果

図5.4.8 温度成層界面の定常波運動 (RUN-2)

表中の記号の意味等は以下のとおりである。

- ① ブシネスク近似の有無：MODEL-1およびMODEL-2では、ブシネスク近似を用いて導かれた既往の  $k-\varepsilon$  モデルを基礎式としている。一方、MODEL-3およびMODEL-3Sでは、4.1で誘導したものを基礎方程式としている。なお、温度成層化現象に伴う液位の低下がない状態でブシネスク近似の有無の相違を比較するため、MODEL-3では、4.1で得られた基礎方程式系のうち、特に連続式に関しては、ブシネスク近似を適用して得られる次式を(4.1.18)式の代わりに用いている。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{---(5.4.17)}$$

- ② 乱流拡散係数：本研究の第2章で得られた乱流拡散係数に対する実験結果および液体金属ナトリウムを用いた成層流実験の結果等<sup>23), 26)</sup>から液体金属ナトリウムの成層流中の渦動粘性係数および乱流プラントル数に対して、次のような関係式が得られる。

$$\varepsilon_M / (C_v k^2 / \varepsilon) = \frac{1}{1 + 0.2B} \quad \text{---(5.4.18)}$$

$$\frac{1}{Pr_t} = \frac{0.7}{1 + 0.02B} \quad \text{---(5.4.19)}$$

ここで、 $B$ はLaunder<sup>12)</sup>により提案された成層度の強さを表すパラメータで(2.2.22)式で定義されるものである。図5.4.9中に示される曲線A、A'はそれぞれ(5.4.18)、(5.4.19)式の左辺と $B$ の関係に相当する。MODEL-2、-3および-3Sでは(5.4.18)、(5.4.19)式で表される関係式を用いて渦動粘性係数や乱流拡散係数が定められている。一方、MODEL-1では、以下のような既往の関係式を用いている。

$$\varepsilon_M / (C_v k^2 / \varepsilon) = 1 \quad \text{---(5.4.20)}$$

$$\frac{1}{Pr_t} = 1 \quad \text{---(5.4.21)}$$

すなわち、MODEL-1では浮力の作用により乱流拡散が抑制されるという効果が考慮されていない。このため、MODEL-1とMODEL-2との解析結果を比較することにより、乱流拡散係数に対する浮力効果の影響を明らかにすることができる。

- ③ モデルの係数値：解析モデルの係数の値として、表5.4.4に示される2組の係数を設定した。

表5.4.4 解析モデルの係数

	$C_k(\gamma)$	$C_\varepsilon(\gamma)$	$C_{\varepsilon_1}(\gamma)$	$C_{\varepsilon_2}(\gamma)$	$C_v$
C-1	0.09	0.075	1.44	1.90	0.09
C-2	$\frac{0.09}{\gamma}$	$\frac{0.075}{\gamma}$	$\frac{1.44}{\gamma}$	$\frac{1.90}{\gamma}$	0.09

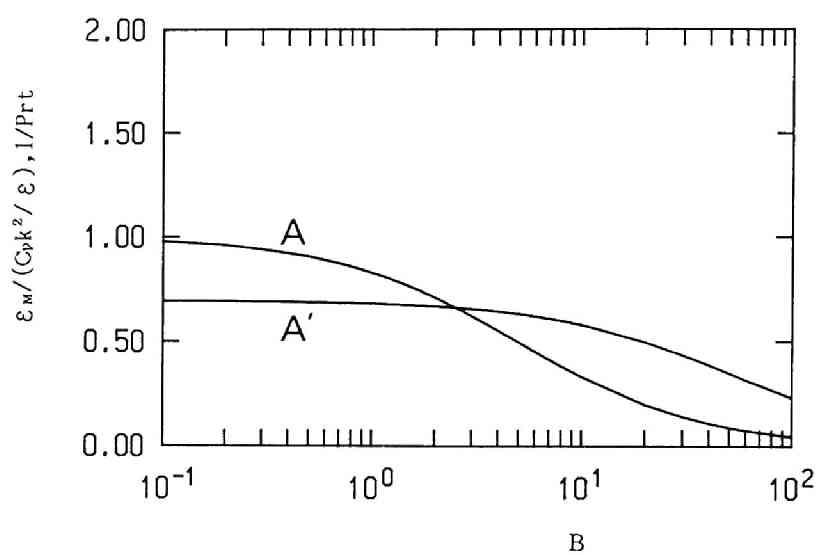


図5.4.9 渦動粘性係数と乱流プラントル数に対する成層度の影響  
(A: (5.4.18)式, A': (5.4.19)式)

上表中の $\gamma$ は次の値を表す。

$$\gamma = 1 - \beta (\overline{\Theta} - \Theta_s) \quad \text{--- (5.4.22)}$$

表5.4.4中の係数C-1は既往の $k - \varepsilon$ モデルの係数値であり、一方、C-2はこれらの係数に対する $\gamma$ の影響を簡単に $1/\gamma$ として表したものである。MODEL-1およびMODEL-2ではC-1, MODEL-3およびMODEL-3SではC-2が用いられる。

- ④ 流入流出流体の境界条件：MODEL-1、-2および-3では、温度成層化現象に伴う自由液面の低下が生じないという条件下で数値解析を行うため、円筒容器へ流入・流出する流体の体積が等しいという条件を設定した。また、MODEL-3Sでは液面の低下を数値解析するため、流入および流出流体の質量が一定であるという条件を与えた。このため、MODEL-3Sでは、円筒容器内の流体の質量は全熱過渡時間を通じて一定に保たれることになる。
- ⑤ 自由液面の境界条件：MODEL-1、-2および-3では液面の高さは一定であるとした。また、MODEL-3Sでは、5.1で述べたMAC法を改良した自由液面の境界条件を用いている。

## (2) 解析体系

図5.4.10に解析対象となる円筒容器の形状を示した。容器は軸対称2次元の形状であり、容器直径は12mである。容器底面の中央に流体が流入する直径D(3.0m)の入口があり、その0.5m上方に原子炉上部構造物(UIS)に相当する直径1.5mの円柱が存在する。流体の出口は幅0.5mのスリット状のものであり、容器の側面上にある。図5.4.11に座標系と、解析結果を比較検討する断面(SECTION-A)および点(P0～P2)の位置を示した。

数値解析の対象となるのは、一定温度の高温の液体金属ナトリウムが容器内を流れる定常状態とそれに続く熱過渡状態である。定常状態では、温度 $T_1$ (500℃)の液体金属ナトリウムが一定流量 $Q_0$ (2.0 m<sup>3</sup>/s)で円筒容器内へ流入する。この体積流量 $Q_0$ は質量流量 $M_0$ では約 $1.76 \times 10^3$  kg/sに相当する。前述したように、全熱過渡時間を通じてMODEL-1、-2および-3では流入・流出流量が $Q_0$ に保たれ、MODEL-3Sでは流入・流出質量が $M_0$ に保たれる。定常状態における容器入口からの流体の平均流速 $U_0$ は約0.28 m/sであり、液面の高さHは6mである。一方、定常状態に続く熱過渡状態においては、図5.4.12に示したように容器内へ流入する流体の温度は250秒間に $T_1$ から $T_2$ (300℃)へと線形に低下し、その後一定値 $T_2$ に保たれる。

## (3) 解析結果

図5.4.13にMODEL-1、-2および-3により得られた図5.4.11中のSECTION-Aにおける鉛直方向の温度分布を示した。図中の $t^*$ および $\Theta^*$ はそれぞれ無次元時間および無次元温度であり、次式で定義される。

$$t^* = t U_0 / D \quad \text{--- (5.4.23)}$$

$$\Theta^* = (\overline{\Theta} - T_2) / (T_1 - T_2) \quad \text{--- (5.4.24)}$$

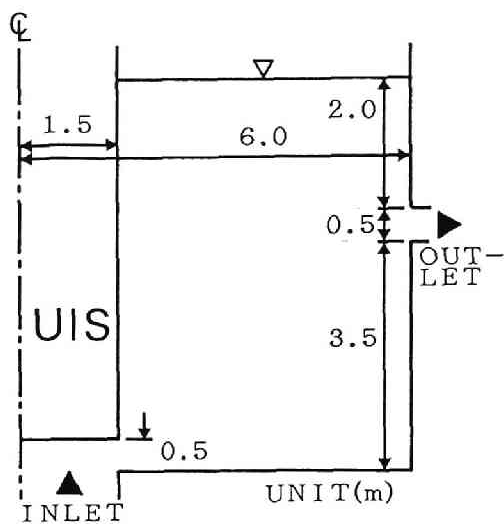


図5.4.10 円筒容器の形状

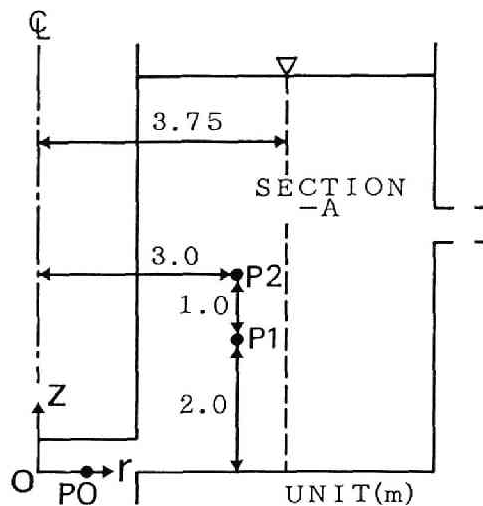


図5.4.11 座標系

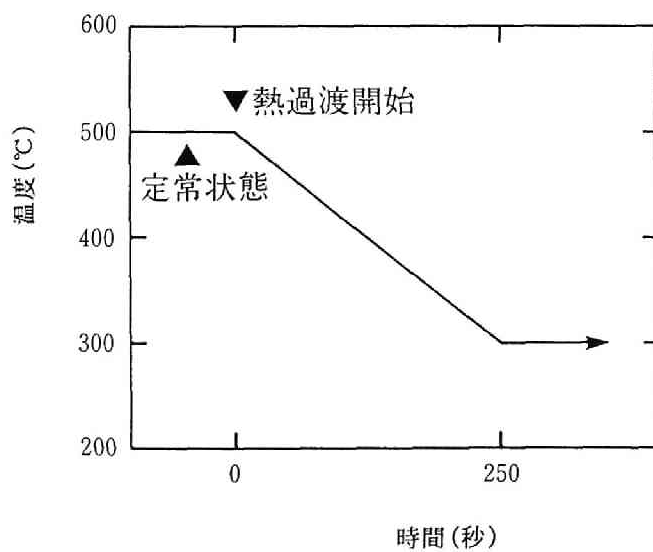


図5.4.12 INLET部分における流入流体の温度変化

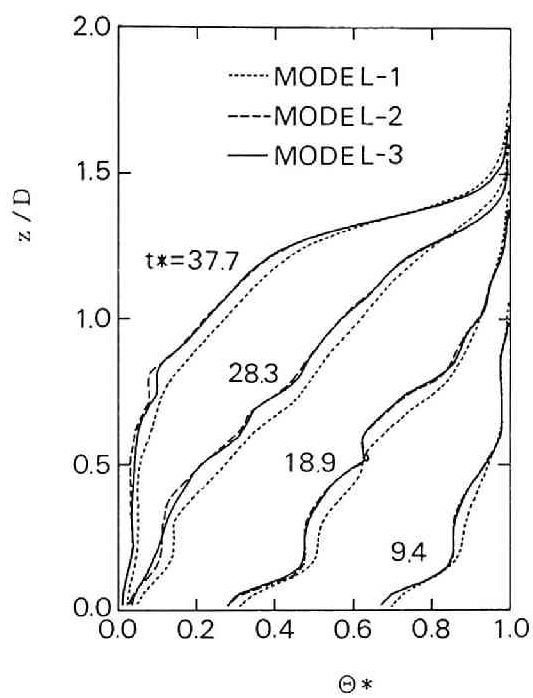


図5.4.13 SECTION-Aにおける鉛直方向の温度分布

前述したように、上式中で  $U_0$  は定常状態での入口流入流速 (0.28 m/s)、 $D$  は入口直径 (3 m)  $T_1$  および  $T_2$  は熱過渡開始前後の流入流体の温度 (それぞれ 500℃ と 300℃) である。

MODEL-1 と MODEL-2 のモデル上の相違は、乱流拡散係数に対する浮力効果の評価の方法にある。MODEL-1 では成層度が強まるにつれ運動量や熱の乱流拡散が抑制されるという効果が考慮されていないため、MODEL-1 の計算結果は、MODEL-2 と比較して温度の拡散が大きく、温度勾配が緩いものとなっている。一方、MODEL-2 と MODEL-3 の相違は連続式を除いた他の基礎方程式系に対するブシネスク近似の有無にある。両モデルの解析結果の相違はさほど大きいものではないが、温度成層化の進展とともにその相違が増大してくる。図 5.4.14 に MODEL-2 と MODEL-3 により得られた SECTION-A における  $t^* = 37.7$  の乱れエネルギーの鉛直分布を示す。また、同時刻の SECTION-A における  $\varepsilon_M$  と  $\varepsilon_H$  の分布をそれぞれ図 5.4.15、図 5.4.16 に示した。これらの図では MODEL-2 と MODEL-3 の相違は有意なものとなっていると考えられるが、これは MODEL-3 で考慮されている運動方程式やエネルギー方程式の移流項に対する密度変化の効果や、ブシネスク近似を用いないことにより現れた乱流量に対する密度効果等が無視し得ないものになったためであると考えられる。

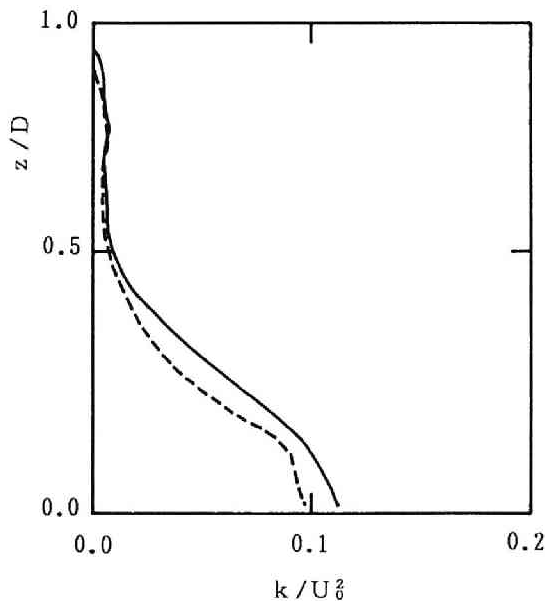


図 5.4.14 乱れエネルギーの分布 (--- MODEL-2, — MODEL-3)

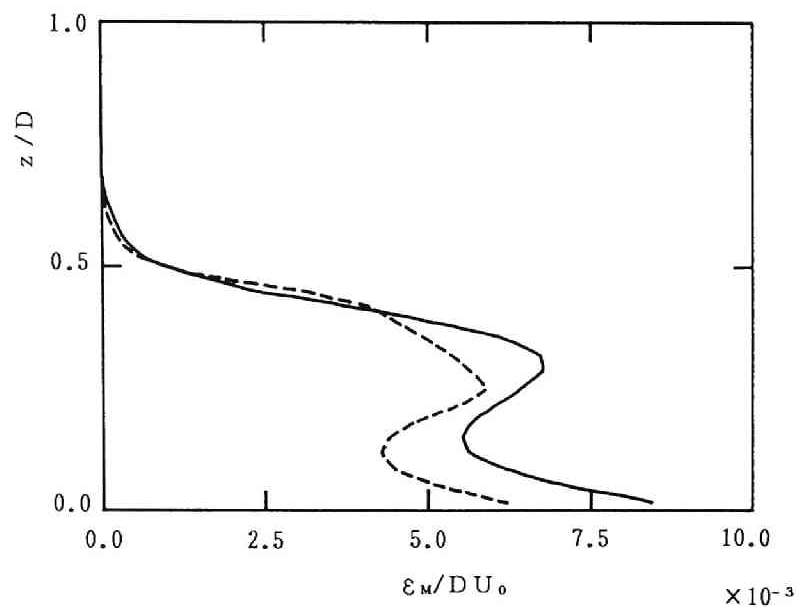


図 5.4.15 渦動粘性係数の分布 (--- MODEL-2, — MODEL-3)

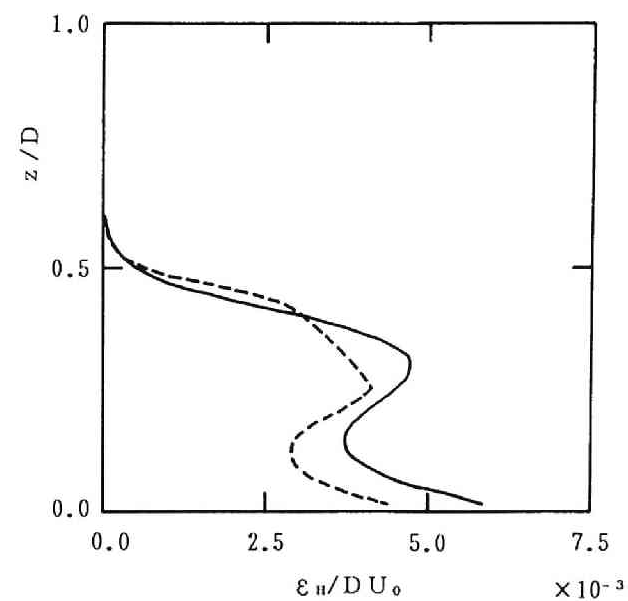


図 5.4.16 乱流熱拡散係数の分布  
(--- MODEL-2, — MODEL-3)



MODEL-3Sによる数値解析では、温度成層化現象に伴う自由液面の低下が合わせて計算される。図5.4.17に流速 $U_0$ で無次元化した流速ベクトルの分布と(5.4.24)式で表される正規化した温度の等温線を示した。等温線の間隔は0.1で、太い線は値が0.5の等温線を表す。図5.4.18にMODEL-2とMODEL-3Sにより得られたSECTION-Aの温度分布を示す。MODEL-3Sでは流体の収縮による液面低下が考慮されているため、図5.4.18中のMODEL-2とMODEL-3Sとの相違は、図5.4.13中のMODEL-2とMODEL-3の相違よりも大きいものとなっている。図5.4.11に示される点P0～P2における温度時系列を図5.4.19に示した。このうち、点P0の温度は流入流体温度に相当するもので、数値解析上は入力境界条件となっているものである。MODEL-3Sでは、温度の変化がMODEL-2よりもやや遅れたものとなっている。図5.4.20に自由液面の高さの時間的な変化を示した。比較的急峻な温度勾配を有する温度成層界面が円筒容器出口部分近傍に形成される時刻( $t^* \cong 40$ )以降は、液面低下の速度がそれ以前より遅いものとなっている。

## 5. 5 まとめ

本章では、これまでに得られた、成層度の影響を考慮した乱流モデルの係数や成層流の乱流特性量に対する表示式、また数値解析モデル等の適用性に関する考察を行う。

5.1では、数値解析モデル等を適用するための解析方法に関する検討を行った。すなわち、基礎方程式中の非線形項の解析方法、圧力のポアソン方程式の行列解法、また自由液面の解析方法について検討を加えた。

5.2では、まず第2章で得られた実験結果を用いて改良を加えた2方程式乱流モデルを開水路内に形成された成層流に適用した。その結果、改良したモデルにより流速分布や温度分布、また温度変動強度等が適切に計算されることが示された。また、第4章で得られたサブグリッドスケールモデルを用いて成層流のラージエディシミュレーションを行い、数値解析により得られた流速や温度の乱流特性に関する検討を加えた。

5.3では開水路内に形成された成層流の断熱側壁面近傍の数値解析を行った。解析モデルとしては、壁面近傍に適用可能な低レイノルズ数の場における既往の乱流モデルと第3章で得られた乱れ場の影響を考慮した温度変動量の散逸率の表示式を組み合わせ用いた。実験結果との比較から、本研究で提案した温度変動量の散逸率の表示式を用いることにより、壁面近傍の温度変動強度の分布が適切に計算されることが明らかとなった。

5.4では軸対称の円筒容器内に生ずる成層化現象の数値解析を行った。第2章の結果を用いた2方程式乱流モデルにより、実験で観察された成層化時の温度変動特性や成層界面の大規模な揺動現象がほぼ妥当に解析されることが示された。また、第4章で導いたブシネスク近似を用いない2方程式乱流モデルを、実際的高速増殖炉に近いスケールの円筒容器内における液体金属ナトリウムの温度成層化現象に適用した。その結果、相対密度の変化が大きい成層化現象では、既往のブシネスク近似を用いた2方程式乱流モデルとの相違が生ずることが示され、また容器内の流体の質量が保存される場合には、自由液面の低下の過程が第4章で導いた解析モデルにより予測できることが示された。

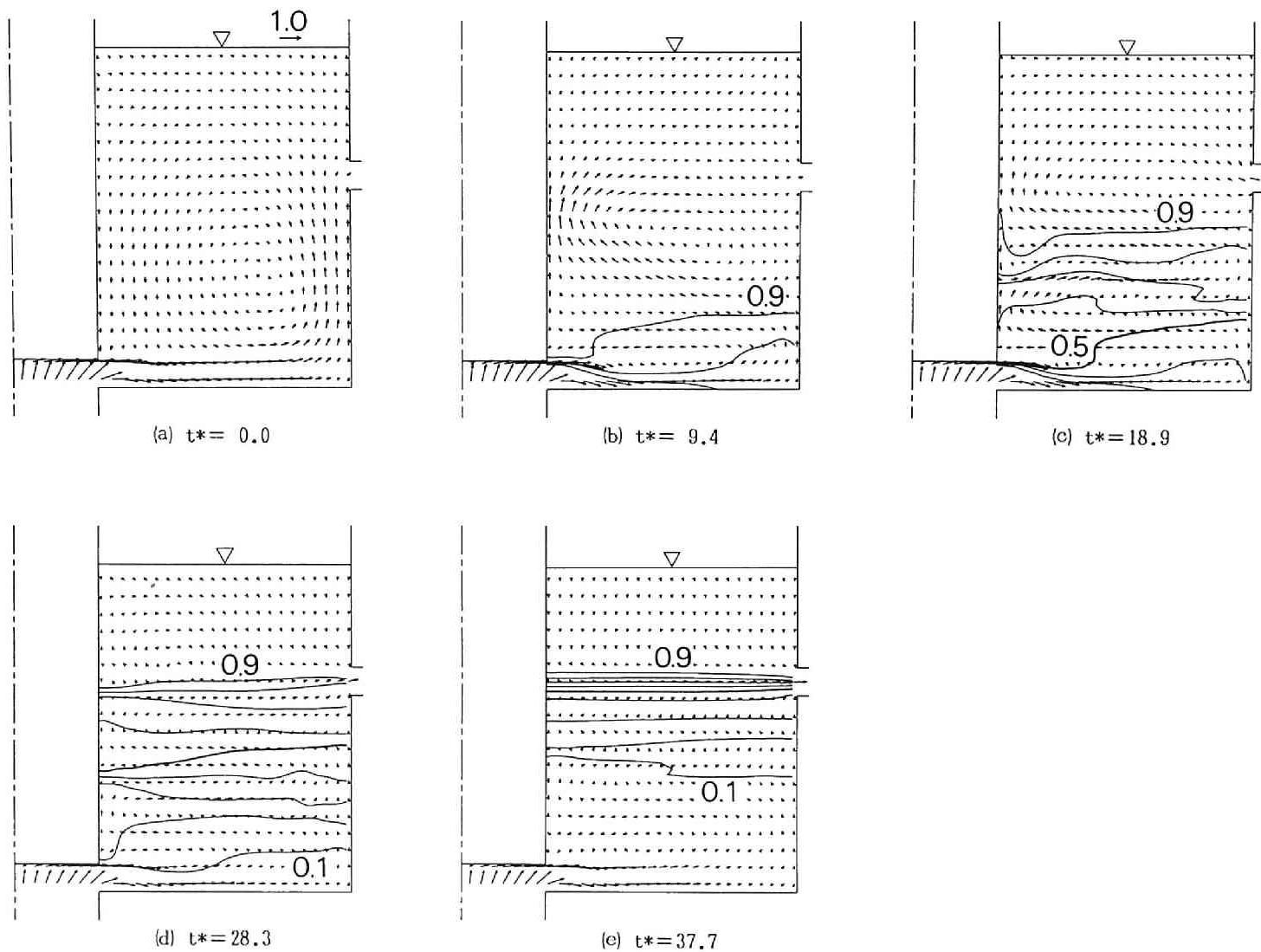


図5.4.17 流速ベクトルと等温線の分布

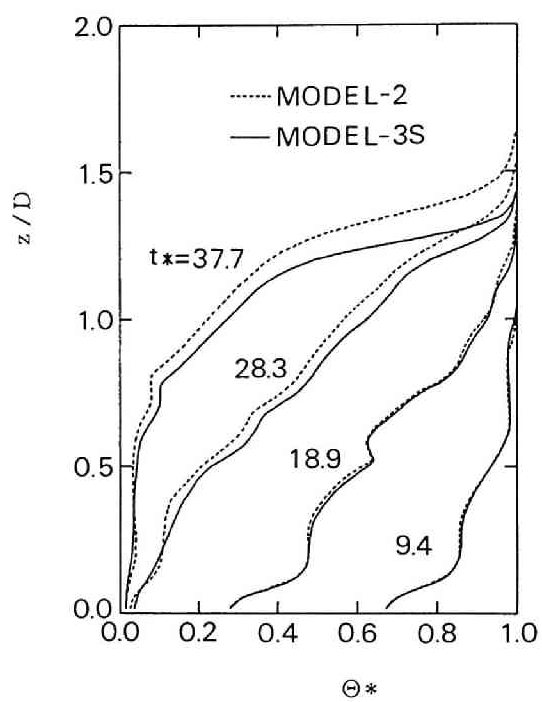


図5.4.18 SECTION-Aにおける鉛直方向の温度分布

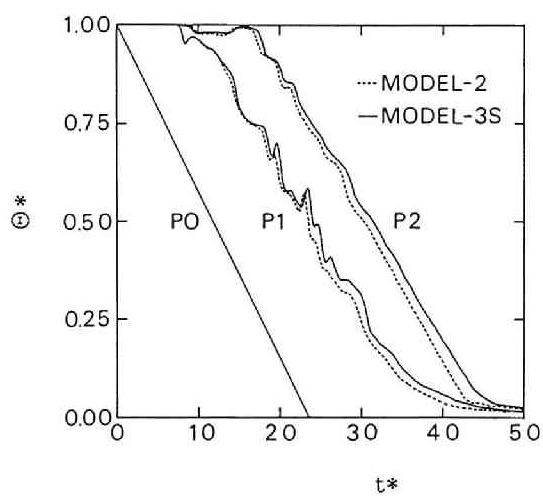


図5.4.19 温度時系列

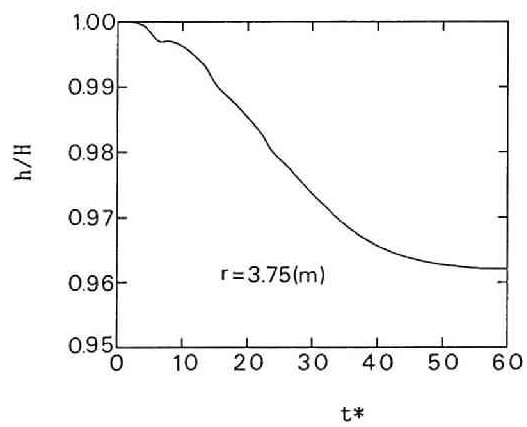


図5.4.20 液位の時間的变化

## 《第5章：参考文献》

- 1) Hirt, C.W.: Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations, J. Comput. Phys., Vol. 2, 1968.
- 2) Roache, P.J.: Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers Inc., 1976.
- 3) 日本物理学会編: スーパーコンピュータ, 培風館, 1988.
- 4) Young, D.: Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 76, pp. 92-111, 1954.
- 5) Douglas, J.: Alternating Direction Methods for Three Space Variables, Numerische Mathematik, Vol. 4, pp. 41-63, 1962.
- 6) Amsden, A.A. and Harlow, F.H.: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows, Los Alamos Scientific Lab., Rep. No. LA-4370, 1970.
- 7) 武本行正・奥村博司・鳥井清司: 任意形状のセキを越える流れの数値解法 - (I) 理論 -, 農土論集 89, pp. 38-47, 1980.
- 8) 武本行正・武内智行・奥村博司・薦田広章: 自由表面および内部境界面をもつ開水路非定常流の数値解析法, 農業土木学会誌, 第50巻, 第6号, 1982.
- 9) Hirt, C.W. and Shannon, J.P.: Free-Surface Stress Conditions for Incompressible-Flow Calculations, J. Comput. Phys., Vol. 2, 1968.
- 10) 岩佐義朗: 水理学, 朝倉書店, 1980.
- 11) Launder, B.E.: Turbulence Models and their Experimental Verification, Imperial College, Dept. of Mech. Eng. Report HTS/73/26, 1973.
- 12) Launder, B.E.: On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech., Vol. 67, 1975.
- 13) 牛島 省, 守屋祥一: 2 方程式乱流モデルの成層流への適用性, 電力中央研究所報告, 研究報告: U87070, 1988.
- 14) 岩佐義朗, 細田 尚, 伊藤邦展: 乱流モデルによる Buoyant Surface Jet の数値解析, 京都大学防災研究所年報 第30号, 1987.
- 15) Rodi, W.: Turbulence Models and their Application in Hydraulics, A State of the Art Review presented by the IAHR Section on Fundamentals of Division II Experimental and Mathematical Fluid Dynamics, 1980.
- 16) Launder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W.: Progress in the Development of a Reynolds-Stress Closure, J. Fluid Mech., Vol. 68, 1975.
- 17) Jones, W.P.: The Predictions of Laminarisation with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, 15, 301, 1972.
- 18) Jones, W.P. and Launder, B.E.: The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two-Equational Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, 16, 1119,

1973.

- 19) Hanjalić, K. and Launder, B.E.: Contribution towards a Reynolds-Stress Closure for Low-Reynolds-Number Turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol. 74, 1976.
- 20) Patel, V.C., Rodi, W. and Scheuerer, G.: Turbulence Model for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review, *AIAA J.*, Vol. 23, No. 9, 1984.
- 21) Lam, C.K.G. and Bremhorst, K.A.: Modified Form of the  $k-\epsilon$  Model for Predicting Wall Turbulence, *J. Fluids Eng.*, Vol. 103, 1981.
- 22) Garreton, D., Lacroix, C., Maguet, Y. and Viollet, P.L.: Hot Plenum Computations Using Local Wall Models instead of Wall Functions, *IAHR 5th Int. Meet. on Liquid Metal Thermalhydraulics*, 1986.
- 23) Ushijima, S. and Moriya, S.: Calculations of Thermal Stratification Phenomena in a Cylindrical Vessel, *Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, 1988.
- 24) Moriya, S., Tanaka, N. and Katano, N.: Effects of Reynolds Number and Richardson Number on Thermal Stratification in Hot Plenum, *CRIEPI Rep. No. E383006*, 1987.
- 25) Ushijima, S.: Turbulence Model for Thermal Stratification Phenomena with Large Density Effects, *AIChE symp. series No. 269*, Vol. 85, 1989.
- 26) Iritani, Y., Nakamura, K., Ueda, S., Kiyokawa, T., Ushijima, S. and Moriya, S.: Turbulent Characteristic of Thermal Stratification in a Sodium Flow, *Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, 1988.

## 第6章 結論

本研究では、成層流の主として温度場に関係する乱流特性量についての実験的あるいは理論的な考察を行い、これを表現する表示式や数値解析モデルを提案した。さらに、本研究で導いた表示式や数値解析モデルを開水路内の成層流および円筒容器内の温度成層化現象に適用し、その妥当性について検討を行った。以下に本研究で得られた主要な結論を述べる。

- (1) 第2章では、開水路内の安定な成層流を対象とした乱流計測実験の結果を用いて、流速変動量と成層流の成層度の関係、乱流拡散係数と成層度の関係等を明らかにした。また、温度変動量に対する乱流モデルの方程式中の拡散項の係数に対する成層度の影響についても検討を加えた。そして、これらの実験結果を用いて、成層度の影響を考慮した2方程式乱流モデルのモデル係数やモデル表示式を提案した。
- (2) 第3章では、成層流の温度場に関係する乱流特性量についての理論的な面からの考察を行った。3.1では成層流の温度の積分特性距離に対するモデル化された輸送方程式を導き、方程式中の生成項と散逸項のモデル係数を実験結果等を用いて定めた。そして代数方程式の形とした輸送方程式の適用性を実験結果を用いて検討した結果、その妥当性が示された。
- (3) 3.2では等方性乱流場における温度変動量の散逸率に関する考察を行い、この散逸率に対する乱流レイノルズ数や乱流ペクレ数等の影響を明らかにした。この考察によって得られた表示式に基づいて、成層流中の温度変動量の散逸率の表示式を提案した。
- (4) 3.3では上記(3)の成層流中における温度変動量の散逸率の表示式を用いて、既往の乱流プラントル数の表示式の改良を行い、乱流レイノルズ数等の乱れ場の影響が考慮された乱流プラントル数の表示式を導いた。この表示式により、これまでに計測された乱流プラントル数と成層度の関係に示されるいくつかの傾向が適切に表現された。さらに3.4でも上記(3)で得られた結果を用いて、温度のスペクトル方程式に関する考察を行い、乱流レイノルズ数やプラントル数をパラメータとして含んだ解析可能な形の同方程式を提案した。
- (5) 第4章では、成層流の熱流動現象を数値解析的に予測するための解析モデルに関する考察を行った。4.1では密度変化が大きい成層流を対象として、ブシネスク近似を用いずに2方程式乱流モデルの基礎方程式を導いた。また、4.2では非等温場のラージェディシミュレーションで用いるサブグリッドスケールモデルに関する考察を行って、サブグリッドスケールの温度変動量の散逸率に着目したモデル式を導いた。
- (6) 第5章では、第2～第4章で得られた成層流の乱流特性量に対する表示式や数値解析モ

デルの適用性に関する検討を行った。5.1では数値解析手法に関する検討を行い、基礎方程式中の非線形項や圧力の解法、また自由液面の解法とそれらの適用性に関する考察を行った。

(7)5.2では解析モデルの成層流に対する適用性について検討した。ここではまず第2章で得られた実験結果を用いて改良を加えた2方程式乱流モデルを開水路内の成層流に適用した。その結果、改良したモデルにより流速分布や温度分布、また温度変動強度等が適切に計算されることが示された。また、第4章で得られたサブグリッドスケールモデルを用いて成層流のラージエディシミュレーションを行い、数値解析により得られた流速や温度の乱流特性に関する検討を加えた。

(8)5.3では開水路内に形成された成層流の断熱側壁面近傍の数値解析を行った。解析モデルとしては、壁面近傍に適用可能な低レイノルズ数の場における既往の乱流モデルと上記(3)で得られた乱れ場の影響を考慮した温度変動量の散逸率の表示式を組み合わせを用いた。実験結果との比較から、本研究で提案した温度変動量の散逸率の表示式を用いることにより、壁面近傍の温度変動強度の分布が適切に計算されることが示された。

(9)5.4では軸対称の円筒容器内に生ずる成層化現象の数値解析を行った。第2章の結果を用いた2方程式乱流モデルにより、実験で観察された成層化時の温度変動特性や成層界面の大規模な揺動現象がほぼ妥当に解析されることが示された。また、第4章で導いたブシネスク近似を用いない2方程式乱流モデルを、実際の高速増殖炉に近いスケールの円筒容器内における液体金属ナトリウムの成層化現象に適用した。その結果、このような相対密度の変化が大きい成層化現象では、既往のブシネスク近似を用いた2方程式乱流モデルとの相違が生ずることが示され、また容器内の流体の質量が保存される場合には、自由液面の低下の過程が第4章で提案したモデルにより解析できることが明らかとなった。

## 謝辞

最後に、本研究を行うにあたり、終始懇切なご指導、ご教示を賜った京都大学工学部土木工学科・岩佐義朗教授ならびに電力中央研究所我孫子研究所・安芸周一所長に深甚なる謝意を表する。

論文作成にあたっては、京都大学工学部土木工学科・井上和也助教授と電力中央研究所FBR部・加藤正進部長ならびに水利部・白砂孝夫部長より貴重な助言を頂いた。また電力中央研究所FBR部熱流動研究室・田中伸和室長には温かい励ましの言葉を頂いた。さらに、著者が1984年に入所以後所属した環境部および水利部構造水利研究室、FBR部熱流動研究室の方々には種々の助言を頂いた。最後に㈱電力計算センターの田口富貴子さんおよび宇田川有子さん、㈱タナックスの軽部仁氏、㈱CRSの方々には数値解析や室内実験等に関して協力して頂いた。以上の方々に心より感謝の意を表する。



